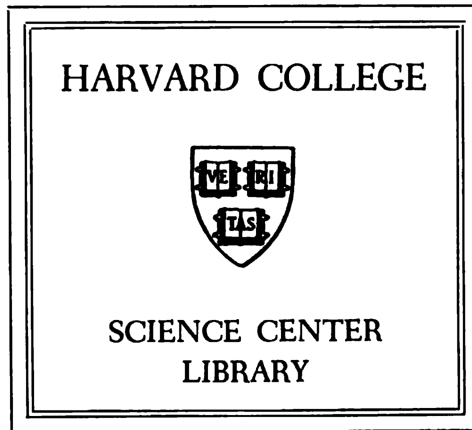



HARVARD COLLEGE
VE RI TAS
SCIENCE CENTER
LIBRARY



LEÇONS

SUR

LA GÉOMÉTRIE.



LEÇONS

SUR

LA GÉOMÉTRIE,

PAR

ALFRED CLEBSCH;

RECUEILLIES ET COMPLÉTÉES

PAR FERDINAND LINDEMANN,

Professeur
à l'Université de Fribourg en Brisgau.

TRADUITES

PAR ADOLPHE BENOIST,

Docteur en droit,
Membre de la Société Mathématique de Franc .

TOME DEUXIÈME.

COURBES ALGÉBRIQUES EN GÉNÉRAL ET COURBES DU TROISIÈME ORDRE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1880

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE PREMIER.

Théorie générale des courbes algébriques.

CHAPITRE II

Les courbes de troisième ordre ou de troisième classe.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME DEUXIÈME.

LEÇONS

SUR

LA GÉOMÉTRIE.

TOME DEUXIÈME.

COURBES ALGÉBRIQUES EN GÉNÉRAL ET COURBES DU TROISIÈME ORDRE.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORIE GÉNÉRALE DES COURBES ALGÉBRIQUES.

I. — Les polaires d'un point relativement à une courbe.

A la théorie des coniques devraient succéder naturellement celle des courbes du troisième ordre ou de la troisième classe, et corrélativement la théorie des formes ternaires cubiques. Cependant un grand nombre des questions qu'on rencontre dans cette étude peuvent sans grande difficulté recevoir immédiatement une réponse générale, applicable aux courbes d'un ordre quelconque; en même temps ces considérations générales nous permettront d'obtenir par avance des vues plus précises sur les diverses propriétés invariantes et sur les figures covariantes qui se rencontrent déjà dans les courbes du troisième ordre. Si dans ce qui suit nous entreprenons d'esquisser dans ses traits fondamentaux une théorie des courbes algébriques, c'est donc d'abord au minimum dans l'in-

tention d'acquérir des points de vue nouveaux suivant lesquels la théorie des courbes spéciales doit être abordée; pour préciser, c'est surtout la détermination de certains nombres caractéristiques d'une courbe qui doit nous occuper. Il va de soi que nous nous bornons aux propriétés projectives des courbes, c'est-à-dire aux propriétés qui ne sont pas altérées par une transformation linéaire (dont le déterminant n'est pas nul). Plus tard cependant, viendront s'ajouter à cette étude des recherches correspondant en un sens à des notions plus générales que celles données par la théorie des invariants des transformations *linéaires*. Ces recherches sont relatives à la question de savoir quelles sont les propriétés d'une courbe qui restent invariables dans une transformation quelconque *rationnelle* (non linéaire), et ouvrent ainsi à notre exploration un champ notablement plus vaste.

Une courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre est donnée par une équation homogène dans laquelle les variables x_1, x_2, x_3 entrent à la $n^{\text{ième}}$ dimension. Si nous ordonnons cette équation suivant les puissances de x_3, nous reconnaissons qu'elle renferme en général

$$1+2+3+\ldots+n+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

coefficients. L'un de ces derniers peut toujours être pris égal à l'unité; la courbe dépend donc de $\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1=\frac{n(n+3)}{2}$ constantes. Comme maintenant la condition que la courbe passe par $\frac{n(n+3)}{2}$ points donnés fournit autant d'équations *linéaires* pour la détermination des coefficients [1], nous pouvons énoncer ce théorème :

Une courbe est en général déterminée par $\frac{n(n+3)}{2}$ *de ses points.*

Nous mentionnons ici ce résultat en passant, devant plus tard approfondir les questions qui s'y rattachent. Nous allons, en premier lieu, aborder l'étude du système des points d'intersection d'une droite avec une courbe. Soit

$$f(x_1, x_2, x_3)=a_x^n=0$$

---

(1) *Voir* le résultat correspondant pour les coniques, t. I, p. 62.

l'équation de cette dernière. On obtient ses points de rencontre avec la ligne qui joint deux points y et z en posant (t. I, p. 93)

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = \varkappa_1 y_1 + \varkappa_2 z_1, \\ x_2 = \varkappa_1 y_2 + \varkappa_2 z_2, \\ x_3 = \varkappa_1 y_3 + \varkappa_2 z_3. \end{cases}$$

Si nous développons f suivant les puissances de $\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}$, il vient (*voir* t. I, p. 252, le résultat correspondant en ce qui concerne les formes binaires)

$$(2)\qquad \begin{cases} 0 = \varkappa_1^n a_y^n + n\varkappa_1^{n-1}\varkappa_2 a_y^{n-1} a_z \\ \quad + \frac{n(n-1)}{1.2}\varkappa_1^{n-2}\varkappa_2^2 a_y^{n-2} a_z^2 + \ldots + \varkappa_2^n a_z^n. \end{cases}$$

La loi de formation des coefficients de ce développement sous forme non symbolique est immédiatement donnée par le théorème de Taylor. Si nous posons

$$\begin{aligned} &D^0 f = f(y_1, y_2, y_3) = a_y^n, \\ &D f = a_y^{n-1} a_z, \\ &D^2 f = a_y^{n-2} a_z^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &D^k f = a_y^{n-k} a_z^k, \end{aligned}$$

nous avons la formule récurrente

$$(3)\qquad \begin{cases} z_1 \frac{\partial D^k f}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial D^k f}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial D^k f}{\partial y_3} \\ = (n-k)\, a_y^{n-k-1} a_z^{k+1} = (n-k)\, D^{k+1} f. \end{cases}$$

Nous pouvons aussi inversement trouver d'une manière tout à fait analogue chaque coefficient de l'équation (2) au moyen du suivant; car on a

$$(4)\qquad \begin{cases} y_1 \frac{\partial D^{k+1} f}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial D^{k+1} f}{\partial z_2} + y_3 \frac{\partial D^{k+1} f}{\partial z_3} \\ = (k+1)\, a_y^{n-k} a_z^k = (k+1)\, D^k f. \end{cases}$$

La signification géométrique des équations

$$D f = 0, \quad D^2 f = 0, \quad \ldots, \quad D^k f = 0, \quad \ldots, \quad D^n f = 0$$

est connue d'après ce qui a été dit sur les formes binaires (t. I, p. 253). Par la substitution (1) nous avons introduit sur la ligne qui joint y et z une détermination binaire de coordonnées (x_1, x_2). Les points d'intersection de la droite $\overline{yz}$ avec la courbe qui correspondent aux n racines de (2) donnent les n points d'une forme binaire. Les équations $D^k f = 0$ représentent par suite sur la ligne $\overline{yz}$ les différents systèmes polaires du point z relativement aux points fondamentaux. Ainsi, par exemple, $Df = 0$ est la condition pour que y appartienne au premier groupe polaire de z, ou z au $(n-1)^{\text{ième}}$ groupe polaire de y relativement au système de points considéré. Si donc nous faisons dans (2) y constant et z variable, *l'équation*

$$D^k f = 0,$$

donne une courbe d'ordre k dont les k points d'intersection avec une droite passant par y forment le $(n-k)^{\text{ième}}$ *système polaire du point y relativement aux n points d'intersection de la droite avec la courbe originaire* $f = 0$. La courbe elle-même est appelée la $(n-k)^{\text{ième}}$ *courbe polaire ou* $(n-k)^{\text{ième}}$ *polaire* de y par rapport à la courbe primitive ([1]). Les intersections de chaque polaire $D^k f = 0$ avec celles d'ordre immédiatement supérieur $D^{k+1} f = 0$ ont d'ailleurs une importance particulière : c'est ce que l'on reconnaît en considérant avec attention l'équation de la tangente en un point d'une courbe.

Le point y peut être en effet situé sur la courbe $f = 0$, ce qui donne

$$D^0 f = a_y^n = 0.$$

Alors dans l'équation (2) le premier terme disparaît, et un facteur $\frac{x_1}{x_2}$ se trouve séparé : l'équation a une racine $\frac{x_1}{x_2} = 0$, comme cela doit être. Si nous imposons maintenant la condition qu'un nouveau point d'intersection de la droite $\overline{yz}$ se confonde avec y, c'est-à-dire qu'un nouveau facteur $\frac{x_1}{x_2}$ se sépare dans (2), Df doit nécessairement s'annuler en même temps que $D^0 f$, ce qui donne une équation linéaire par rapport à z. Or nous avons désigné sous

([1]) Sur l'origine et le développement de cette théorie, *voir* la note de la page 253 du tome I.

le nom de *tangente* une ligne droite qui coupe la courbe en deux points coïncidents (t. I, p. 35). Donc *l'équation de la tangente de $f = 0$ au point y est* (dans le cas de z variable)

$$Df = a_y^{n-1} a_z = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1} z_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} z_2 + \frac{\partial f}{\partial y_3} z_3\right) = 0,$$

et les coordonnées de la tangente sont

$$(5) \qquad \begin{cases} \rho u_1 = \dfrac{\partial f}{\partial y_1}, \\ \rho u_2 = \dfrac{\partial f}{\partial y_2}, \\ \rho u_3 = \dfrac{\partial f}{\partial y_3}. \end{cases}$$

Ici se présente le problème qui consiste à effectuer au moyen de ces équations le passage de l'équation de la courbe en coordonnées points à son équation en coordonnées lignes. Cette dernière s'obtient en éliminant ρ, y_1, y_2, y_3 entre les trois équations (5) et entre

$$nf(y_1, y_2, y_3) = \rho(u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3) = 0,$$

et c'est ainsi que nous sommes arrivés au but lorsqu'il s'est agi des coniques (t. I, p. 100). Ce problème d'élimination est néanmoins, en général, un problème d'ordre élevé, et sa solution directe offre de sérieuses difficultés. Il est d'autant plus important pour nous de nous trouver en mesure, par les méthodes symboliques de la théorie des invariants et, au moyen du principe de translation, de ramener toute la question sur le terrain binaire, en sorte qu'il suffise d'effectuer la formation du discriminant d'une forme binaire (t. I, p. 347); et l'on a pour cela des méthodes générales plus abrégées. Ce procédé a donné pour la classe de la courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre le nombre $n(n-1)$, tandis que le degré de l'équation par rapport aux coefficients a été trouvé égal à $2(n-1)$. On arrive aussi au premier résultat par la réflexion suivante qui nous ramène aux polaires.

Si dans l'équation de la tangente

$$a_y^{n-1} a_z = 0$$

nous prenons le point z constant et le point y variable, cette équation, jointe à

$$a_y^n = 0,$$

détermine sur la courbe primitive les points y dont les tangentes passent par z, c'est-à-dire les points de contact de ces tangentes. Ces deux courbes d'ordre n et $n-1$ se coupent en $n(n-1)$ points; on peut donc mener de z à la courbe un nombre égal de tangentes, et par conséquent *la classe d'une courbe d'ordre n est en général égale à n* $(n-1)$ (¹). D'une manière analogue et en vertu du principe de dualité, l'ordre d'une courbe de classe k doit aussi être égal à $k(k-1)$. En appliquant la nouvelle règle à la courbe donnée de classe $n(n-1)$, on arriverait à cette proposition contradictoire que la courbe donnée du $n^{\text{ième}}$ ordre serait de l'ordre

$$n(n-1)(n^2-n-1).$$

Cette contradiction se résout néanmoins par un examen plus exact; car une courbe qui, comme figure engendrée par un point, est de l'espèce la plus générale, possède toujours, si on la considère comme engendrée par une ligne, des propriétés très-particulières. Dans les coniques qui sont du deuxième ordre et de la deuxième classe, cette particularité n'apparaît pas encore sous le même aspect. Cependant une courbe du deuxième ordre qui dégénère en un couple de lignes peut déjà nous servir comme exemple de résultats semblables : il ne nous a pas été possible de représenter la courbe entière en coordonnées lignes (t. I, p. 129); l'équation nous donnait au contraire uniquement le sommet du couple compté deux fois; le retour de cette équation en coordonnées lignes à l'équation en coordonnées points perdait d'ailleurs toute signification. Précisément pour cette raison, l'exemple dont il s'agit ne peut donner aucune idée applicable aux cas généraux. Un couple de lignes est, en effet, comme figure ponctuelle, du *deuxième* ordre et de classe *nulle*. Ce n'est qu'à propos des courbes d'ordre plus élevé que nous pouvons approfondir les faits de cette nature.

(¹) La détermination de ce nombre a été donnée par Poncelet (*Annales de Gergonne*, t. VIII, p. 214).

La voie suivie ici pour la détermination des $n(n-1)$ tangentes issues de z nous donne immédiatement le théorème suivant :

Les $n(n-1)$ points de contact des tangentes menées d'un point à une courbe du $n^{ième}$ ordre forment le système complet des intersections de la courbe avec une courbe d'ordre $n-1$, qui est la première polaire du point z.

Pour $n=2$ ce théorème n'exprime rien de spécial, car deux points sont toujours en ligne droite; il en est autrement pour les courbes d'ordre plus élevé. Ainsi nous avons pour les courbes du troisième ordre six points de contact situés sur une conique, tandis que cette dernière courbe est déterminée par cinq points. En général, une courbe d'ordre $n-1$ est déterminée, d'après ce qui précède, par $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ points, et notre théorème exprime que les autres

$$n(n-1)-\frac{(n-1)(n+2)}{2}=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

points, qui complètent le nombre des points de contact, sont situés sur la même courbe d'ordre $n-1$.

D'une manière semblable, $D^2f=0$, $D^3f=0$, ... sont des courbes des ordres $n-2$, $n-3$ qui appartiennent à z suivant une règle complétement déterminée. D'après la loi de formation indiquée à leur égard, on peut énoncer leur dépendance géométrique en disant que, de même que $Df=0$ est la première polaire de z relativement à $f=0$, de même D^2f est la première polaire de z par rapport à $Df=0$, D^3f la première polaire par rapport à $D^2f=0$, et ainsi de suite. On peut, d'après cela, énoncer en général le théorème suivant :

La $k^{ième}$ polaire de z, relativement à la $i^{ième}$ polaire de z, prise par rapport à $f=0$, est la $(i+k)^{ième}$ polaire de z relativement à $f=0$.

Si l'on considère simultanément plusieurs points et qu'on forme toujours la $k^{ième}$ polaire de l'un relativement à la $i^{ième}$ polaire de l'autre, on peut énoncer une série de théorèmes semblables, les mêmes que nous avons obtenus à l'égard des points situés sur une droite (t. I, p. 254). Il n'est par conséquent pas nécessaire de s'ar-

rêter de nouveau sur ces propositions; on peut, en effet, les conclure immédiatement de celles qui ont déjà été démontrées. Nous mentionnerons seulement, à titre d'exemple, un théorème qui apparaît comme une généralisation de la relation polaire rencontrée dans les coniques. De l'équation

$$a_y^{n-k} a_z^k = 0$$

il résulte ce qui suit : *Si y est situé sur la $k^{ième}$ polaire de z, z est situé sur la $(n-k)^{ième}$ polaire de y.*

Enfin la $(n-1)^{ième}$ polaire d'un point y est toujours une ligne droite. Si en particulier le point est situé sur la courbe primitive, cette droite, d'après (5), deviendra une tangente. Mais la droite dont il s'agit est en même temps la polaire linéaire de y par rapport à toutes les polaires d'ordre plus élevé, et par conséquent la $(n-i-1)^{ième}$ polaire de la $i^{ième}$ polaire de y.

Si donc le pôle est situé sur la courbe primitive, toutes ses propres polaires y passent et y touchent la courbe primitive.

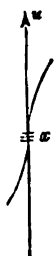
Comme, d'après ce qui précède, la première polaire d'un point y touche la courbe, deux des $n(n-1)$ tangentes que l'on peut mener en ce point à la courbe se confondent avec sa propre tangente. *Donc d'un point de la courbe on ne peut plus mener à celle-ci que $n(n-1)-2$ tangentes.*

Nous avons déterminé les tangentes en faisant couper la courbe par une droite en *deux* points coïncidents. Nous pouvons maintenant rechercher quelles sont les droites qui rencontrent la courbe en *trois* points consécutifs. Ces tangentes sont appelées *tangentes d'inflexion;* leurs points de contact, *points d'inflexion.* Leur désignation vient de ce que dans un point de cette espèce la courbe change le sens de sa courbure, ainsi qu'on le démontre régulièrement dans les applications du Calcul différentiel à la Géométrie (*fig.* 1). Nous pouvons aussi nous faire une image de la forme de la courbe dans le voisinage d'un point d'inflexion par la réflexion suivante (¹). En général, la tangente tourne d'une manière continue autour de la courbe, tandis que son point de

(¹) *Voir* Plücker, *Theorie der algebraischen Curven.* Bonn, 1839. 2ᵉ Section, § 3.

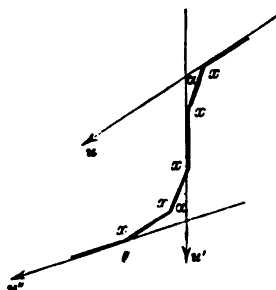
contact marche dans le même sens. Maintenant, dans un point d'inflexion, deux tangentes successives coïncident; donc, tandis que le point continue à avancer régulièrement, la rotation de sa

Fig. 1.



tangente au point d'inflexion est nulle; cette tangente s'arrête un instant pour poursuivre aussitôt sa rotation dans le sens opposé, conformément aux lois de la continuité. C'est ce qui apparaîtra avec évidence si nous imaginons pour un instant (*fig.* 2) la

Fig. 2.



courbe remplacée par un polygone. Le point décrivant (x) s'avance sur la droite enveloppante (u) toujours dans la même direction; mais cette ligne, après avoir été dans le même sens de la position u à la position u', passe de u' à u'' en tournant dans le sens opposé. Si maintenant le mouvement devient continu et que le polygone devienne une courbe, la grandeur de la rotation de la tangente dans la position u' est nulle. Donc, tandis que les côtés élémentaires de la courbe restent comparables avec les précédents et avec les suivants, les angles de contingence α deviennent en u' infiniment

petits par rapport aux précédents et aux suivants, *et c'est ainsi que la fig.* 2 *se transforme en la fig.* 1.

Nous obtenons la condition analytique d'un point d'inflexion en imposant que parmi les trois points d'intersection de la droite $\overline{yz}$ avec la courbe trois se confondent en y. Dans l'équation (2) un facteur $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3$ doit se trouver séparé, c'est-à-dire que les conditions

$$\begin{aligned} D^0 f &= a_y^n = 0,\\ D f &= a_y^{n-1} a_z = 0,\\ D^2 f &= a_y^{n-2} a_z^2 = 0, \end{aligned}$$

doivent être satisfaites simultanément. Si y est un point d'inflexion, les deux dernières équations coexisteront conformément au raisonnement employé, lorsque z sera sur la tangente de y. Mais l'équation $D^2 f = 0$ ne peut être satisfaite pour chaque point de cette tangente qu'autant que $D^2 f$ renferme l'expression $D f$ comme facteur. La conique

$$D^2 f = \Sigma\Sigma f_{ik} z_i z_k = 0,$$

dans l'expression de laquelle on a posé f_{ik} au lieu de

$$\frac{1}{n(n-1)} \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_k},$$

doit par suite se décomposer en un couple de droites. La condition pour qu'il en soit ainsi est donnée par l'évanouissement du déterminant de la conique, c'est-à-dire de celui qui est formé avec les secondes dérivées partielles de f, à savoir :

$$\frac{1}{6}\Delta = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (^1).$$

En vertu des relations

$$f_{ik} = a_y^{n-2} a_i a_k = b_y^{n-2} b_i b_k = c_y^{n-2} c_i c_k,$$

ce déterminant sera donné sous forme symbolique, d'une manière

---

(1) On a ajouté le facteur $\frac{1}{6}$, parce que Δ a été défini sous la forme symbolique sans l'indication de ce facteur.

analogue à celui que nous avons appelé *déterminant hessien* dans la théorie des formes binaires, par

$$a_y^{n-2}\,b_y^{n-2}\,c_y^{n-2}\begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ b_2 b_1 & b_2^2 & b_2 b_3 \\ c_3 c_1 & c_3 c_2 & c_3^2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 (abc)\, a_y^{n-2}\, b_y^{n-2}\, c_y^{n-2},$$

ou, si nous permutons a, b, c de toutes les manières possibles, et que nous prenions la somme des expressions ainsi obtenues (t. I, p. 334),

$$(6) \qquad \Delta = (abc)^2\, a_y^{n-2}\, b_y^{n-2}\, c_y^{n-2}.$$

Les points d'inflexion sont donc déterminés sur la courbe originaire par ses intersections avec une courbe d'ordre $3(n-2)$, $\Delta = 0$. Il est également facile de montrer que *chacune* de ces intersections fournit un point d'inflexion de $f = 0$. Si l'on pose en effet, conformément à la condition $\Delta = 0$,

$$f_{ik} = u_i v_k + v_i u_k,$$

il vient

$$D^2 f = 2 u_z v_z, \quad Df = u_y v_z + v_y u_z, \quad D^0 f = 2 u_y v_y.$$

Si maintenant $D^0 f = 0$, l'une des deux quantités u_z ou v_y doit s'annuler. Si $u_y = 0$, Df sera égal à $u_z v_y$, c'est-à-dire ne différera de u_z que par une constante et par conséquent sera facteur de $D^2 f$, ce qui était à démontrer. Nous avons par suite ce théorème:

Les points d'inflexion sont les points d'intersection de la courbe originaire $f = 0$ *avec la hessienne* $\Delta = 0$; *leur nombre est en conséquence égal à* $3n(n-2)$ (1).

Toutefois la courbe $\Delta = 0$ n'est pas, à l'inverse, complétement déterminée par les seuls points d'inflexion, car, en tant qu'il s'agit uniquement de ses intersections avec $f = 0$, on peut la remplacer par une courbe quelconque du système

$$\Delta + Mf = 0,$$

---

(1) *Voir* HESSE, *Ueber die Wendepunkte der Curven dritter Ordnung* (*Journal de Crelle*, t. 28). Le nombre des points d'inflexion a été donné par PLÜCKER (*ibid.*, t. 12).

M étant une expression quelconque de l'ordre

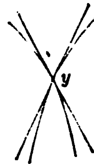
$$3(n-2)-n=2n-6.$$

Cette observation est spécialement importante à l'égard des courbes du troisième ordre; car, par une détermination convenable du facteur M, on arrive pour ces dernières à obtenir d'une manière effective les coordonnées des points d'inflexion par simple extraction de racines.

Les points d'intersection de la tangente avec la courbe ne peuvent être réunis au point de contact en nombre supérieur à trois, sans que les coefficients de f satisfassent à des conditions particulières (¹). En effet, le nombre des tangentes que l'on peut mener à $f=0$ est simplement infini, et pour cette raison, dès qu'on leur impose une condition, on n'en obtient déjà plus qu'un nombre limité.

La manière précédente de déterminer les points d'inflexion devient néanmoins illusoire s'il existe sur la courbe des points dont la tangente est indéterminée, ce qui entraîne cette conséquence que la $(n-2)^{\text{ième}}$ polaire se décompose en un couple de droites. Cela se présentera toujours lorsque la courbe se traverse elle-même en un point (*fig.* 3), auquel cas deux tangentes différentes sont en réalité possibles.

Fig. 3.



Dans un semblable *point double de la courbe,* l'équation de la tangente ne peut exprimer autre chose que l'annulation simultanée de ses coordonnées (5). *Nous avons par conséquent, pour un point double* y $\left(\text{en posant } f_i=\frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial y_i}\right)$, *les équations*

$$(7)\qquad f_1=a_y^{n-1}a_1=0,\quad f_2=a_y^{n-1}a_2=0,\quad f_3=a_y^{n-1}a_3=0.$$

(¹) *Voir*, sur ces points élevés exceptionnels, CRAMER, *Introduction à l'analyse des lignes courbes;* Genève, 1750, p. 403, et CAYLEY, *Journal de Crelle*, t. 34.

Pour que ces relations soient satisfaites, il est nécessaire non-seulement que y ait une situation particulière, mais encore qu'il existe une relation entre les coefficients de la courbe, car nous pouvons éliminer les y entre les trois équations (7). On n'a pas besoin d'avoir égard à l'équation de la courbe, parce qu'elle est satisfaite d'elle-même en vertu de

$$f = f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3.$$

La réalisation de cette élimination conduira à une équation

$$R = 0,$$

dont il n'a pas été possible jusqu'ici de déterminer d'une manière abrégée la loi de formation ([1]). On appelle l'expression R le *discriminant de la courbe;* c'est naturellement un invariant de la forme f; pour une conique, par exemple, elle se confond avec le déterminant $A = (abc)^2$. En général, on a le théorème suivant:

Le résultant de trois équations respectivement des ordres m, n, et p par rapport à trois variables homogènes est du degré np relativement aux coefficients de la première, du degré mp relativement à ceux de la seconde, et du degré mn relativement à ceux de la troisième. Pour la démonstration de ce théorème, imaginons que les coordonnées des np points communs aux deux dernières courbes aient été calculées. Si maintenant les trois courbes doivent avoir un point commun, les coordonnées des np points dont il vient d'être parlé devront satisfaire identiquement à la première équation. On obtiendra donc le résultant en formant le produit des np expressions dérivées de la première équation par la substitution des coordonnées des np points précités. Or ces derniers ne dépendent que des coefficients de la seconde et de la troisième équation; le produit est donc du degré np par rapport aux coefficients de la première équation, et, par conséquent, puisque les trois équations doivent être employées symétriquement à la formation du résultant, du degré mp par rapport aux coefficients de

---

([1]) Sylvester a fait, il est vrai, connaître un procédé qui donne, sous la forme d'un déterminant, le résultat de trois équations du même ordre; mais le caractère invariant du résultant n'en ressort pas clairement. *Voir* SALMON, *Introductory lessons;* etc. (third edition, art. 91).

la seconde équation et du degré mn par rapport à ceux de la troisième.

L'application de ce théorème aux équations (7) donne immédiatement la proposition qui suit :

Le discriminant d'une forme ternaire du $n^{ième}$ ordre, c'est-à-dire l'invariant dont l'évanouissement est la condition de l'existence d'un point double dans la courbe correspondante d'ordre n, est du degré $3(n-1)^2$.

Toute droite passant par un point double y a deux de ses intersections avec la courbe confondues en ce point; en effet, l'équation (2) donne toujours alors deux racines $\frac{x_1}{x_2} = 0$. Nous pouvons maintenant, de même que nous avons déterminé la tangente en un point quelconque, chercher quelles sont *les droites qui coupent trois fois la courbe en y*. Dans ce cas, z doit être situé de telle sorte que l'on ait aussi

$$D^2 f = a^{n-2} a_z^2 = \Sigma\Sigma f_{ik} z_i z_k = 0.$$

Mais, comme y est un point double, nous avons, d'après (7),

$$0 = f_i = f_{i1} y_1 + f_{i2} y_2 + f_{i3} y_3, \quad (i = 1, 2, 3);$$

le déterminant des f_{ik} est donc nul. *Par suite, la $(n-2)^{ième}$ polaire du point double*

$$D^2 f = a_y^{n-2} a_z^2 = 0$$

donne un couple de lignes, à savoir le produit des deux tangentes au point double; la dénomination de tangente est justifiée par cette circonstance que, parmi les trois points d'intersection de la droite en question qui sont confondus en y, deux sont situés consécutivement sur l'une des branches de courbe passant par y, tandis que le troisième doit être envisagé comme un simple point de rencontre avec l'autre branche (*fig.* 3). L'évanouissement du déterminant Δ montre en même temps que la présence de points doubles sur une courbe influe sur le nombre des points d'inflexion, car un certain nombre des points d'intersection des deux courbes est absorbé par le point double; nous donnerons plus tard la détermination exacte de cette influence.

Pour trouver les coordonnées u_i, v_i des tangentes au point

double, nous devons, par conséquent, poser

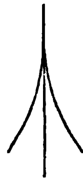
$$f_{11} = u_1 v_1, \quad 2f_{12} = u_1 v_2 + v_1 u_2,$$
$$f_{22} = u_2 v_2, \quad 2f_{23} = u_2 v_3 + v_2 u_3,$$
$$f_{33} = u_3 v_3, \quad 2f_{31} = u_3 v_1 + v_3 u_1,$$

et, pour la résolution de ces équations, il a été donné dans la théorie des coniques des méthode générales (t. I, p. 130). Il peut arriver en particulier que les deux lignes se confondent en une seule (*fig.* 4); il vient alors

$$f_{11} = u_1^2, \quad f_{12} = u_1 u_2,$$
$$f_{22} = u_2^2, \quad f_{23} = u_2 u_3,$$
$$f_{33} = u_3^2, \quad f_{31} = u_3 u_1.$$

Un tel point de la courbe est désigné sous le nom de *point de*

Fig. 4.



rebroussement; il est caractérisé par le fait que les secondes dérivées de f y sont égales aux carrés et aux produits de trois grandeurs.

Nous avons reconnu l'évanouissement identique de Df comme la marque distinctive d'un point double. On peut aller plus loin dans la même voie. Si l'on a en premier lieu $D^2 f \equiv 0$, on obtient un point triple et ainsi de suite : *si pour un point quelconque* $D^{k-1} f$ *est identiquement nul, la courbe a en ce point un point multiple d'ordre* k. Par point multiple d'ordre r, on entend un point par lequel passent r branches différentes de la courbe, c'est-à-dire *tel que toute droite qui passe par ce point* y *ait en commun avec la courbe* r *points réunis*. D'après la loi de formation exprimée dans l'équation (4), toutes les autres polaires $D^{k-1} f$, $D^{k-2} f$, ..., Df s'évanouissent identiquement; et *l'équation*

$$D^k f = a_y^{n-k} a_z^k = 0$$

donne alors le produit des k différentes tangentes du point en question. Car, en premier lieu, la courbe représentée par cette équation a aussi en y un point d'ordre de multiplicité k, puisque sa $(k-1)^{\text{ième}}$ polaire, y étant pris pour pôle, n'est autre que $D^{k-1}f$, et, par suite, s'annule de même indépendamment de z. Mais une courbe d'ordre k ayant un point multiple de k branches se décompose nécessairement en k lignes droites, car autrement une droite menée par le point multiple pourrait encore couper la courbe en un ou plusieurs points, et, par conséquent, avoir avec elle plus de k points communs, ce qui n'est pas possible. Ces lignes doivent toucher en y les différentes branches de la courbe originaire; car, si nous considérons un point voisin de y sur $D^k f$ et que nous posions par suite $z_i = y_i + dy_i$, nous avons pour la détermination des k directions d'avancement sur la courbe $D^k f = 0$ la même équation,

$$a_y^{n-k} a_{dy}^k = 0,$$

que pour la détermination des k directions d'avancement sur la courbe originaire, ce qui démontre la proposition précédente. Nous approfondirons plus tard la nature des points multiples et nous reconnaîtrons alors dans une forte mesure l'importance de la théorie des polaires pour l'étude de ces points et pour la détermination de leur influence sur le nombre des points d'inflexion, sur la classe de la courbe, etc.

La théorie des polaires n'a toutefois pas moins d'importance si l'on se propose le problème de l'interprétation géométrique des formes symboliques. Le principe de translation nous a donné un moyen de résoudre cette question pour les formes adjointes en supposant que celles-ci ne renferment pas de facteurs du type (abc) (¹); la notion de la formation polaire permet maintenant d'arriver au même but pour toutes les formes mixtes qui sont uniquement composées de facteurs du type (abu) et a_x. Négligeant, en effet, d'abord tous les facteurs a_x^α, b_x^β qui se rencontrent dans une forme semblable, nous pouvons considérer les symboles a, b, ... dans l'expression restante comme des symboles désignant

(¹) *Voir* d'ailleurs une Note sur ce sujet dans le dernier Chapitre du tome III, à l'occasion de la théorie des formes mixtes linéo-linéaires (connexes).

la $\alpha^{\text{ième}}$ la $\beta^{\text{ième}}$ polaire du point x, ainsi qu'il sera montré bientôt en détail par un exemple. La proposition géométrique représentée par l'évanouissement de l'expression ainsi transformée s'obtient alors conformément au principe de translation. On arrive, par exemple, aux formes mixtes de l'espèce supposée ici, si l'on établit non pas le produit des $n(n-1)$ tangentes menées d'un point x à une courbe, mais le produit des équations de leurs points de contact en coordonnées lignes. Ces points s'obtiennent comme étant des points d'intersection de la courbe originaire $a_z^n = 0$ et de la première polaire de x, $a_z^{n-1} a_x = 0$. On a donc seulement à former le résultant de deux formes binaires a_z^n, α_z^{n-1} du $n^{\text{ième}}$ et du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre, à appliquer à ce résultant le principe de translation, à remplacer tous les n symboles de α_z^{n-1} qui entrent dans le résultant par des symboles de a_z^n et à ajouter n facteurs b_x, c_x, etc. Ainsi, par exemple, le produit des points de contact des tangentes menées d'un point x à une conique $a_z^2 = 0$ est donné (t. I, p. 355) par

$$(abu)(acu)\,b_x c_x = 0.$$

Nous avons ici une forme quadratique a_z^2 et une forme linéaire $\alpha_z = \beta_z = a_x a_z$, dont le résultant est égal à $(a\alpha)(a\beta)$. Si l'on complète les déterminants de ce résultant par l'addition de u, de manière à en faire des déterminants ternaires, qu'on remplace α, β respectivement par b, c et qu'on ajoute les facteurs b_x, c_x, on obtient la formation annoncée. Un autre exemple est donné par l'équation

$$(8) \qquad (abu)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} = 0.$$

Si nous prenons x constant, cette équation représente la $(n-2)^{\text{ième}}$ polaire de x en coordonnées lignes : si nous posons u constant, elle donne une courbe de l'ordre $2(n-2)$ comme lieu des points dont les $(n-2)^{\text{ièmes}}$ polaires touchent la droite donnée u. *Sur toute droite il existe donc $2(n-2)$ points dont les $(n-2)^{\text{ièmes}}$ polaires sont touchées par cette même droite.*

Nous serons encore conduits à la même équation (8) par les considérations suivantes. Nous chercherons sur une droite u quels sonts les points y dont les premières polaires sont précisément

touchées par cette droite en un point x. Or les coordonnées de la tangente de cette polaire au point x sont égales à

$$a_x^{n-2} a_y a_i = f_{i1} y_1 + f_{i2} y_2 + f_{i3} y_3.$$

Elles doivent être proportionnelles aux coordonnées de la droite donnée : nous avons donc les équations

$$\begin{aligned} f_{11} y_1 + f_{12} y_2 + f_{13} y_3 &= \rho u_1, \\ f_{21} y_1 + f_{22} y_2 + f_{23} y_3 &= \rho u_2, \\ f_{31} y_1 + f_{32} y_2 + f_{33} y_3 &= \rho u_3, \\ u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 &= 0. \end{aligned}$$

L'élimination de ρ et de y_1, y_2, y_3 donne alors de nouveau, conjointement avec $u_x = 0$, la condition

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & u_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & u_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} (abu)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} = 0.$$

De ces relations, nous conclurons les théorèmes suivants :

Sur toute droite il existe $2(n-2)$ *points dont la première polaire est touchée précisément par cette droite. Les* $(n-2)^{\text{ièmes}}$ *polaires des* $2(n-2)$ *points de contact sont tangentes à cette même droite.*

Par tout point on peut mener deux droites telles que sur chacune d'elles un point ait cette droite elle-même pour tangente de sa première polaire, et cela de telle sorte que le point de contact soit situé au point donné. Ce sont les deux tangentes qui peuvent être menées de ce dernier point à sa $(n-2)^{\text{ième}}$ *polaire.*

La hessienne est le lieu des points pour lesquels ces deux lignes coïncident (¹). Car, lorsque ce dernier cas se présente, il faut

---

(¹) *Voir* Clebsch, *Ueber eine Klasse von Eliminationsproblemen und über einige Sätze aus der Theorie der Polaren* (*Journal de Borchardt*, t. 58). Les nombreux théorèmes sur les polaires établis dans cet article se fondent sur une méthode générale d'élimination de m variables entre m équations homogènes, équations parmi lesquelles une est d'ordre quelconque, une est du second degré et $m-2$ sont linéaires. Au moyen de cette méthode, on recherchera, par exemple, la courbe que parcourent les points de contact x si la ligne u enveloppe une courbe donnée.

nécessairement ou bien que le pôle soit situé sur sa conique polaire, c'est-à-dire sur sa $(n-2)^{\text{ième}}$ polaire, ce qui n'arrive que pour les points de la courbe originaire, ou bien que la conique polaire se décompose, auquel cas les deux tangentes se confondent avec la ligne qui joint le pôle au sommet du couple.

Il existe entre la $(n-2)^{\text{ième}}$ et la première polaire d'un point une réciprocité semblable à celle qui s'est présentée dans les derniers théorèmes, et au moyen de laquelle nous pouvons énoncer une nouvelle interprétation de la hessienne. Si, en effet, nous nous imposons la condition que la première polaire ait un point double x, il faut qu'en ce point soient satisfaites les trois équations

$$\frac{1}{n-1}\frac{\partial \mathrm{D}f}{\partial x_i} = a_x^{n-2} a_y a_i = 0.$$

En en éliminant les y_i, nous arrivons de nouveau à la condition

$$a_1 b_2 c_3 (abc) a_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-2} = 0,$$

et, à cause de la permutabilité de a, b, c, le premier membre de cette relation ne diffère de Δ que par un facteur numérique.

La hessienne est donc en même temps le lieu des points dont la $(n-2)^{\text{ième}}$ polaire a un point double, et le lieu des points doubles des premières polaires.

Comme exemple de théorèmes géométriques découlant de la théorie des polaires, mentionnons encore le suivant pour finir. L'équation de la hessienne de la première polaire de y :

$$\mathrm{D}f = a_x^{n-1} a_y = 0,$$

considérée comme courbe primitive, hessienne qui coupe cette courbe aux points d'inflexion, est donnée par

$$(9) \qquad \Delta_{\mathrm{D}f} = (abc)^2 a_x^{n-3} b_x^{n-3} c_x^{n-3} a_y b_y c_y = 0.$$

Si nous supposons que les x soient donnés, nous aurons, en tenant compte de $\mathrm{D}f = 0$, le théorème suivant :

Il existe toujours sur la $(n-1)^{\text{ième}}$ polaire d'un point x trois pôles différents dont les premières polaires ont en x un point d'inflexion.

Lorsque le pôle y se meut sur une courbe $\varphi(y) = 0$, les points d'inflexion de sa première polaire décrivent une courbe dont l'équation s'obtient par élimination des y entre les équations $Df = 0$, $\Delta_{Df} = 0$, $\varphi = 0$. Si, en particulier, la courbe φ est une droite

$$u_y = 0,$$

on peut, en vertu de $Df = a_x^{n-1} a_y = 0$, poser dans Δ_{Df}

$$\begin{aligned} y_1 &= u_2 f_3 - u_3 f_2 = (u_2 a_3 - u_3 a_2)\, a_x^{n-1}, \\ y_2 &= u_3 f_1 - u_1 f_3 = (u_3 a_1 - u_1 a_3)\, a_x^{n-1}, \\ y_3 &= u_1 f_2 - u_2 f_1 = (u_1 a_2 - u_2 a_1)\, a_x^{n-1}. \end{aligned}$$

Si, dans ces trois équations, on suppose les symboles a remplacés respectivement par d, e, f, on obtient comme équation de la courbe cherchée

$$(10) \qquad (abc)^2 (adu)(beu)(cfu)\, a_x^{n-3} b_x^{n-3} c_x^{n-3} d_x^{n-1} e_x^{n-1} f_x^{n-1} = 0.$$

Si donc le pôle décrit une droite, les points d'inflexion des premières polaires parcourent une courbe de l'ordre $6(n-2)$. *Toutes les polaires dont les pôles sont situés sur la droite se coupent en* $(n-1)^2$ *points, qui sont les solutions des équations*

$$(11) \qquad \rho u_1 = f_1, \quad \rho u_2 = f_2, \quad \rho u_3 = f_3.$$

Ces $(n-1)^2$ *points sont des points triples de la courbe* (10). Cette dernière partie de la proposition résulte de ce que, pour $\rho u_i = f_i = d_x^{n-1} d_i = \ldots$, chacun des trois facteurs $(adu) d_x^{n-1}$, $(beu) e_x^{n-1}$, $(cfu) f_x^{n-1}$ s'évanouit identiquement et qu'il en est par suite aussi de même de toutes les secondes dérivées partielles de l'expression (10) par rapport à la lettre x.

Si l'on considère, au contraire, dans l'équation (10) *les quantités* x *comme constantes, et les quantités* u *comme variables, cette équation donne le produit de trois facteurs linéaires; ce sont les équations des trois pôles précités, dont les premières polaires ont en* x *un point d'inflexion* (¹).

Il résulte encore de (11) que :

Si la droite u *enveloppe une courbe* $\varphi(u_1, u_2, u_3) = 0$ *de la*

(¹) *Voir* Clebsch, *Ueber Curven vierter Ordnung* (*Journal de Borchardt*, t. 59).

classe m, les $(n-1)^2$ points d'intersection des premières polaires décrivent la courbe du $m(n-1)^{ième}$ ordre $\varphi(f_1, f_2, f_3) = 0$. Si, en particulier, la droite tourne autour d'un point ξ, la courbe décrite est la première polaire de ξ.

II. — Les points singuliers.

Nous revenons à l'étude des points multiples; nous commencerons par le point double. La nature d'un point de cette espèce dépend de la question de savoir si les facteurs linéaires de $D^2 f$ sont réels (*point double proprement dit*), ou imaginaires (*point isolé*), ou égaux (*point de rebroussement*). Nous allons d'abord étudier la manière d'être de la courbe dans le voisinage de la rencontre des branches. Dans ce but, nous transportons l'origine des coordonnées au point double, de telle manière que les coordonnées de ce dernier point deviennent

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1.$$

Traçant maintenant par le point double une droite quelconque, nous pouvons considérer les coordonnées x_1, x_2 d'un point de cette droite comme les coordonnées de son point d'intersection avec le troisième côté $x_3 = 0$ et, d'autre part, la troisième coordonnée d'un tel point comme un paramètre variant pour les points particuliers de la droite tracée. Nous nous demanderons quelles sont les intersections de cette droite avec la courbe, et dans ce but nous développerons l'équation de cette dernière suivant les puissances du paramètre x_3. Si nous posons

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z,$$

il vient

$$(1) \qquad f(x_1, x_2, x_3) = f^{(0)} z^n + f^{(1)} z^{n-1} + f^{(2)} z^{n-2} + \ldots + f^{(n)}$$

les fonctions $f^{(i)}$ étant homogènes en x, y et d'un ordre égal à leur indice supérieur. Si le point $x = 0, y = 0$ doit être situé sur la courbe, comme nous le supposons, le facteur $f^{(0)}$ indépendant de x, y doit nécessairement s'annuler. Mais, dans le cas d'un point double, pour que l'équation entière renferme le facteur z^2, c'est-à-dire pour que deux points d'intersection de la ligne considérée coïncident à l'origine, il faut que le second terme soit identique-

ment nul. D'autre part, l'équation

$$(2) \qquad f^{(1)} = ax + by = 0$$

donne en général la ***tangente à l'origine;*** car, pour un point situé dans le voisinage immédiat de l'origine, x, y deviennent infiniment petits, et les coefficients des puissances les moins élevés de z disparaissent en comparaison du coefficient $f^{(1)}$ de z^{n-1}. L'équation (1) se réduit donc à son premier terme, c'est-à-dire que la courbe $f=0$ peut, dans le voisinage de l'origine, être remplacée par la ligne droite $f^{(1)}=0$, ou, en d'autres termes, ***cette droite est tangente à la courbe au point $x=0$, $y=0$,*** ce qu'il fallait démontrer.

Lorsqu'il y a un point double, $f^{(1)}$ s'annule identiquement. Le cours de la courbe dans le voisinage du point double est, en négligeant les puissances plus élevées de x, y, représenté par

$$(3) \qquad f^{(2)} = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = 0,$$

ou, en d'autres termes, ***c'est là l'équation du produit des deux tangentes au point double.*** Nous avons ici, les coefficients α, β, γ étant supposés réels, à distinguer les cas suivants :

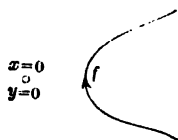
$\beta^2 > \alpha\gamma$, ***point double proprement dit,*** deux tangentes réelles (*fig.* 3).

$\beta^2 = \alpha\gamma$, ***point de rebroussement,*** une seule tangente comptée deux fois (*fig.* 4) (¹).

$\beta^2 < \alpha\gamma$, ***point double isolé,*** deux tangentes imaginaires (*fig.* 5).

Dans ce dernier cas, le point d'intersection des deux tangentes

Fig. 5.



est réel; la courbe a un point réel par lequel ne passe aucune branche réelle.

(¹) Le point de rebroussement est quelquefois appelé *point cuspidal.*

En prenant les deux tangentes du *point double* pour axes de coordonnées $x = 0, y = 0$, nous pouvons donc mettre l'équation de la courbe sous la forme

$$(4) \qquad f(x_1, x_2, x_3) = xy.z^{n-2} + f^{(3)}z^{n-3} + \ldots = 0.$$

Pour un *point de rebroussement,* les deux tangentes étant confondues (par exemple avec l'axe $x = 0$), l'équation de la courbe devient

$$f(x_1, x_2, x_3) = x^2 z^{n-2} + f^{(3)} z^{n-3} + \ldots = 0$$

Nous pouvons encore simplifier la forme de cette dernière équation. Supposons la fonction $f^{(3)}$ donnée par

$$f^{(3)} = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3.$$

La ligne $y = 0$ n'est définie qu'en tant qu'assujettie à passer par le point de rebroussement; nous pouvons donc, en laissant x fixe, disposer encore de y et de z de manière que les termes de la troisième dimension deviennent un cube parfait. Si nous posons en effet

$$y = y' + \lambda x,$$
$$z = z' + \mu y' + \nu x,$$

f se transformera en

$$f = x^2 z'^{n-2} + \varphi^{(3)} z'^{n-3} + \varphi^{(4)} z'^{n-4} + \ldots,$$

les fonctions φ étant, par rapport à x, y, de l'ordre de leurs indices supérieurs. Nous pouvons maintenant choisir λ, μ, ν de manière que le coefficient

$$\varphi^{(3)} = (n-2)x^2(\mu y' + \nu x) + ax^3 + 3bx^2(y' + \lambda x)$$
$$+ 3cx(y' + \lambda x)^2 + d(y' + \lambda x)^3$$

se réduise à un terme renfermant uniquement y'^3 ; on suppose naturellement que d n'est pas nul, auquel cas il y aurait singularité élevée. Nous avons alors pour la détermination de λ, μ, ν les équations suivantes :

$$(n-2)\nu + a + 3b\lambda + 3c\lambda^2 + d\lambda^3 = 0,$$
$$(n-2)\mu + 3b + 6c\lambda + 3d\lambda^2 = 0,$$
$$c + d\lambda = 0.$$

Si donc on écrit de nouveau y, z au lieu de y', z' et $f^{(i)}$ au lieu de $\varphi^{(i)}$, on pourra toujours, au cas de point de rebroussement, mettre l'équation de la courbe sous la forme

$$(5) \qquad f = x^2 z^{n-2} + dy^3 z^{n-3} + f^{(4)} z^{n-4} + \ldots = 0.$$

Nous rattacherons immédiatement aux équations (4) et (5) quelques observations sur la manière dont se comportent la polaire et la hessienne au cas de points doubles ou cuspidaux de la courbe originaire ([1]), observations qui, dans la suite, auront pour nous une grande importance. Nous savons déjà (p. 12) que toutes les premières polaires passent par le point double. Si nous formons maintenant l'équation de la polaire $\varphi = 0$ du point ξ, η, ζ en prenant pour base l'équation (4), il vient

$$\varphi = (\xi y + \eta x) z^{n-2} + \left[(n-2) xy\zeta + \frac{\partial f^{(3)}}{\partial x}\xi + \frac{\partial f^{(3)}}{\partial y}\eta\right] z^{n-3} + \ldots,$$

La tangente de cette courbe à l'origine est donnée par le terme de l'ordre le moins élevé, c'est-à-dire par

$$\xi y + \eta x = 0.$$

D'un autre côté, l'équation de la ligne joignant le pôle ξ, η, ζ à l'origine est

$$\xi y - \eta x = 0.$$

De la forme de ces équations résulte immédiatement, puisque $x = 0$, $y = 0$ sont les tangentes au point double, le théorème suivant :

La première polaire d'un point quelconque passe par le point double et sa tangente est harmonique aux tangentes de la courbe originaire au point double et à la ligne qui joint ce dernier au pôle.

Si nous formons de même, en partant de l'équation (5), la polaire du point ξ, η, ζ pour une courbe à point de rebroussement, il vient, en ordonnant suivant les puissances de z,

$$\varphi = 2x\xi z^{n-2} + [3d\eta y^2 + (n-2)\zeta x^2] z^{n-3} + \varphi^{(3)} z^{n-4} + \ldots = 0.$$

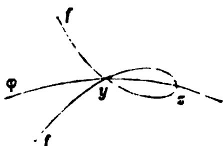
([1]) Ces théorèmes seront démontrés dans la Section suivante (consacrée aux formules de Plücker) en dehors de tout emploi d'un système spécial de coordonnées.

La ligne $x = o$ est par conséquent tangente aussi à toute première polaire. *Donc, dans un point de rebroussement, la première polaire d'un point quelconque touche la tangente de rebroussement.* Il est important de se fixer sur le nombre des intersections que l'on peut imaginer réunies au point de rebroussement. On y parvient, tant qu'il s'agit de points réels, par la considération suivante. Un point double peut en particulier tirer son origine de la circonstance que la courbe possède une boucle, ainsi qu'on le voit dans la *fig.* 6, et c'est d'un point double de cette nature que nous devons partir si nous voulons qu'un point de rebroussement prenne naissance par un passage à la limite. Alors, en effet, en faisant tendre successivement les tangentes l'une vers l'autre, de manière à se confondre, la partie de la courbe comprise dans un de leurs espaces angulaires s'évanouit complétement, car il n'y a plus au delà du point de rebroussement aucun point réel de la courbe. De (5) résulte, en effet, pour un point immédiatement voisin ($z = 1$),

$$x = \sqrt{-dy^3},$$

expression imaginaire pour $d > o$ dès que y devient $> o$. Un semblable évanouissement d'une branche de courbe ne peut avoir

Fig. 6.



lieu que s'il y a présence d'une boucle et rétrécissement successif de cette dernière ; car, autrement, la coïncidence des deux tangentes donnerait ce qu'on appelle un point de contact de la courbe avec elle-même (*voir* ci-dessus *fig.* 14).

Une droite quelconque menée par le point double, droite que nous pouvons imaginer remplacée par une autre branche de courbe (φ dans la figure 6), rencontre encore la boucle dont il s'agit en un point z, et la distance de ce dernier point au point double atteindra pour une certaine position un maximum dont nous pouvons supposer que dépend l'extension de la boucle. Faisons maintenant dégénérer le point double en un point de rebroussement, en res-

serrant de plus en plus la boucle, et en diminuant de plus en plus son maximum jusqu'à ce qu'elle se réduise à un point unique [ce qui fait que dans l'équation (3) la quantité $\alpha\gamma - \beta^2$ se rapproche de plus en plus de zéro]. A ce moment, les deux tangentes au point double coïncident avec la droite dont il a été parlé, et l'autre point z de la branche considérée se confond avec le point de rebroussement qui a ainsi pris naissance. Par conséquent, en considérant la première polaire, trois de ses points d'intersection se trouvent réunis au point de rebroussement de la courbe originaire, car un point double donnerait évidemment deux points d'intersection superposés. On arrive au même résultat par voie analytique. Par les intersections de f et de φ passe toute courbe ayant pour équation $\varkappa f + \lambda\varphi = 0$, et, par conséquent, en particulier la courbe

$$2\xi f - x\varphi = [2\xi d y^3 - 3\eta d x y^2 - (n-2)\zeta x^3] z^{n-3} + \ldots = 0.$$

Nous pouvons donc, tant qu'il ne s'agit que des points d'intersection de f et de φ, remplacer f par cette courbe. Mais l'équation de cette dernière ne renferme aucun terme de la première ou de la seconde dimension en x, y, c'est-à-dire qu'elle a à l'origine un point triple (p. 15) dont les trois tangentes sont données par

$$2\xi d y^3 - 3\eta d x y^2 - (n-2)\zeta x^3 = 0.$$

Ces lignes sont toutes différentes de la tangente à la courbe primitive, et nous avons par suite trois intersections de f et de

$$2\xi f - x\varphi = 0.$$

Une courbe qui possède un point de rebroussement y est rencontrée par chacune de ses premières polaires en trois points coïncidents, c'est-à-dire que l'équation dont dépendent les intersections des deux courbes a trois racines égales qui correspondent au point de rebroussement.

On peut appliquer d'une manière tout à fait semblable les méthodes données ici à la caractérisation des intersections déterminées par la hessienne en un point double ou en un point de rebroussement. Nous avons déjà vu plus haut (p. 14) que la hessienne passe par les points singuliers.

Nous commencerons par la considération du point double, et

nous prendrons la courbe originaire sous la forme (4)

$$f = xy.z^{n-2} + f^{(3)}z^{n-3} + \ldots = 0.$$

En posant maintenant

$$\frac{\partial f^{(3)}}{\partial x} = f_x^{(3)}, \quad \frac{\partial f^{(3)}}{\partial y} = f_y^{(3)},$$

$$\frac{\partial^2 f^{(3)}}{\partial x^2} = f_{xx}^{(3)}, \quad \frac{\partial^2 f^{(3)}}{\partial x \partial y} = f_{xy}^{(3)}, \quad \frac{\partial^2 f^{(3)}}{\partial y^2} = f_{y}^{(3)},$$

on trouve le covariant $\Delta.\frac{1}{6}[n(n-1)]^3$ égal à un déterminant dont les deux premières lignes verticales renferment les éléments ci-après :

$$\begin{array}{ll} f_{xx}^{(3)}z^{n-3}+\ldots, & z^{n-2}+f_{xy}^{(3)}z^{n-3}+\ldots, \\ z^{n-2}+f_{yx}^{(3)}z^{n-3}+\ldots, & f_{yy}^{(3)}z^{n-3}+\ldots, \\ (n-2)yz^{n-3}+(n-3)f_x^{(3)}z^{n-4}+\ldots, & (n-2)xz^{n-3}+(n-3)f_y^{(3)}z^{n-4}+\ldots, \end{array}$$

tandis que dans la troisième ligne on doit placer les éléments

$$\begin{array}{r} (n-2)yz^{n-3}+(n-3)f_x^{(3)}z^{n-4}+\ldots, \\ (n-2)xz^{n-3}+(n-3)f_y^{(3)}z^{n-4}+\ldots, \\ (n-2)(n-3)xyz^{n-4}+(n-3)(n-4)f^{(3)}z^{n-5}+\ldots. \end{array}$$

On voit facilement que, dans le développement de ce déterminant, les termes de l'ordre le moins élevé en x, y sont

$$2(n-2)^2xyz^{3n-8}-(n-2)(n-3)xyz^{3n-8}=(n-1)(n-2)xyz^{3n-8};$$

et de là résulte ce théorème :

En un point double de la courbe originaire, la hessienne a également un point double, et les tangentes des deux courbes au point double sont précisément les mêmes (à savoir : $x=0, y=0$).

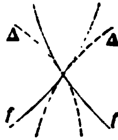
Chaque branche de la courbe originaire est donc, dans un point double, rencontrée par une branche de la hessienne en deux points coïncidents [c'est-à-dire touchée par cette branche (1)] et rencon-

---

(1) Au moyen des méthodes qui vont bientôt être développées dans le texte, on démontre que *les deux branches tangentes l'une à l'autre de la hessienne et de la courbe originaire se présentent respectivement leur côté convexe*, comme le montre la *fig.* 7. Considérons, en effet, les branches qui touchent le côté $x = 0$; pour un point voisin,

trée par l'autre branche en un point unique, ce qui donne en tout trois intersections réunies des deux courbes (*fig.* 7). *Le nombre des points d'intersection qui peuvent être considérés en général*

Fig. 7.



comme réunis en un point double est donc égal à six. On reconnaît aussi directement la même chose par les formules, car, dans la recherche des points d'intersection, nous pouvons remplacer la courbe $\Delta = 0$ par une quelconque du système

$$\Delta + Mf = 0,$$

M étant une fonction de l'ordre $2(n-3)$, et en particulier par

$$\frac{1}{6}[n(n-1)]^3\Delta - (n-1)(n-2)fz^{2n-6} = 0.$$

Dans cette équation, les termes du second ordre en x, y ont complétement disparu; elle représente donc une courbe ayant à l'origine un point triple dont les trois tangentes n'ont aucune relation particulière avec les deux tangentes du point double. Cha-

---

x sera d'un ordre d'infiniment petits plus élevé que y, et par suite la branche en question de la courbe originaire sera approximativement représentée par la parabole

$$x + dy^2 = 0,$$

d étant le coefficient (réel) de y^2 dans $f^{(2)}$. Négligeant de même dans $\frac{1}{6}n^3(n-1)^3\Delta$ les termes multipliés par x, nous trouvons, comme coefficient des z^{3n-9}, l'expression

$$2(n-2)(n-3)yf_y^{(3)} + (n-3)(n-4)f^{(3)} - (n-2)^2y^2f_{yy}^{(3)}.$$

Si l'on néglige encore une fois les termes multipliés par x, et qu'on cherche par suite le facteur de y^3, on reconnaît que la branche correspondante de la hessienne est représentée par la parabole

$$(n-2)x - n.d.y^2 = 0,$$

dont la convexité est de sens opposé à celle de la première parabole.

cune des branches de cette courbe auxiliaire est coupée par chacune des branches de la courbe originaire en un point, ce qui donne encore six intersections.

Pour un *point de rebroussement* nous avons (la constante précédente d étant supposée égale à 1)

$$f = x^2 z^{n-2} + y^3 z^{n-3} + f^{(4)} z^{n-4} + \ldots;$$

et il vient par suite

$$\frac{[n(n-1)]^3}{6}\Delta = \begin{vmatrix} 2z^{n-2}+\ldots & 0+\ldots & 2(n-2)xz^{n-3}+\ldots \\ 0+\ldots & 6yz^{n-3}+\ldots & 3(n-3)y^2z^{n-4}+\ldots \\ 2(n-2)xz^{n-3}+\ldots & 3(n-3)y^2z^{n-4}+\ldots & (n-2)(n-3)x^2z^{n-4}+\ldots \end{vmatrix}$$
$$= -12(n-1)(n-2)yx^2z^{3n-9} + \Delta^{(4)}z^{3n-10} + \ldots.$$

On trouve, par conséquent, que dans Δ les termes les moins élevés en x, y sont de la troisième dimension, et la présence du facteur x^2 donne ce théorème :

Dans un point de rebroussement de la courbe originaire, la hessienne a un point triple, et deux de ses branches y touchent la tangente de rebroussement (1), *tandis que la troisième a une tangente séparée* (*fig.* 8).

On reconnaît le nombre des points d'intersection réunis ici en considérant ($2n$ étant > 7) la courbe

$$\frac{1}{6}[n(n-1)]^3\Delta + \mu y z^{2n-7} f = 0,$$

---

(1) Le fait que deux branches de Δ forment, comme dans la *fig.* 8, un rebroussement résulte de la règle de Newton et Cramer, qui sera bientôt expliquée. On s'assure en effet facilement que l'expression $\Delta^{(4)}$, dans l'équation précédente, renferme un terme en y^4, tandis que les autres sont multipliés par x^2; mais ces autres termes peuvent être négligés pour un point situé dans le voisinage du point de rebroussement, car x est d'un ordre d'infiniment petits plus élevé que y. La courbe $\Delta = 0$ peut donc être remplacée par

$$yx^2 + \delta y^4 = 0,$$

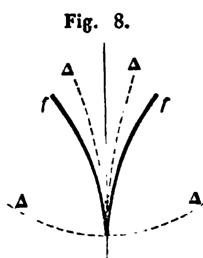
c'est-à-dire se compose de deux branches dont l'une touche la ligne $y = 0$ et l'autre appartient, au contraire, au type du point de rebroussement, comme cela doit être. La situation indiquée dans la *fig.* 8 du rebroussement de Δ par rapport à celui de f résulte de ce que $\delta = \frac{1}{2}\frac{n-3}{n-2}$, d désignant le coefficient de y^3 dans f; il se trouve par conséquent plus petit que d, de sorte qu'à une valeur donnée de y correspond toujours une valeur de x plus petite que pour f.

dans laquelle μ a été mis à la place du facteur numérique

$$12(n-2)(n-1).$$

Cette équation ne renferme pas de terme inférieur au quatrième ordre, ce qui est la marque distinctive d'un point quadruple. Les

Fig. 8.



quatre tangentes de ce point n'ont aucune situation particulière relativement à la tangente de rebroussement; elles sont donc à elles toutes coupées par les deux branches de la courbe originaire en huit points. *Huit des intersections d'une courbe à point de rebroussement et de sa hessienne sont réunies au point de rebroussement.* La chose a été démontrée par les considérations analytiques que nous avons employées pour $2n > 7$; mais elle est encore vraie pour $n = 3$. Dans ce dernier cas, il existe en général neuf points d'inflexion, mais on voit facilement que, dans l'hypothèse d'un point de rebroussement, il n'y en a plus qu'un seul. Alors en effet, ainsi que nous l'avons vu, f est représentable sous la forme

$$f = x^2 z + y^3,$$

d'où

$$6^2 \Delta = \begin{vmatrix} 2z & 0 & 2x \\ 0 & 6y & 0 \\ 2x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -24x^2 y.$$

Pour $f = 0$, $\Delta = 0$, on a donc ou bien $x^2 = 0$ et $y^3 = 0$, ce qui donne six points d'intersection réunis au point de rebroussement, ou bien $y = 0$ et $x^2 z = 0$, ce qui donne encore deux intersections réunies au point de rebroussement, et en outre le point d'inflexion unique $y = 0$, $z = 0$.

Ces exemples, très-importants pour ce qui va suivre, suffiront pour montrer l'essence et l'applicabilité des méthodes exposées. Nous passons maintenant à un problème plus général, *celui qui consiste à déduire la configuration d'une courbe, dans le voisinage d'un point multiple d'ordre k, de la forme de son équation* (¹).

Par un point de cette espèce passent toujours k branches de la courbe; il peut d'ailleurs arriver que plusieurs de ces branches aient entre elles un contact simple ou un contact d'ordre plus élevé, tandis que d'autres branches ont un cours séparé des premières, ainsi que nous venons, par exemple, de le voir pour la manière dont se comporte la hessienne en un point de rebroussement de la courbe originaire. Les recherches suivantes doivent maintenant nous servir à séparer ces différentes branches de la courbe les unes des autres et à les caractériser dans leurs rapports respectifs. Nous reconnaîtrons dans l'ensemble des résultats d'*une première approximation* les combinaisons de trois types fondamentaux qui comprennent les diverses configurations d'une courbe dans le voisinage d'un de ses points. Ces types ont notamment une grande importance pour déterminer la forme des branches de courbe autour d'un point lorsque ces branches sont réelles.

Nous prenons de nouveau le point dont il s'agit pour l'un des sommets du triangle de coordonnées, ou en posant $z = 1$ pour origine d'un système de coordonnées rectangulaires; d'ailleurs, pour simplifier, nous supposerons que l'axe Y soit une tangente de la courbe à l'origine. L'équation de la courbe est alors, suivant (2), de la forme

$$f = x + f^{(2)} + f^{(3)} + \ldots = 0.$$

Avançons maintenant sur la courbe dans la direction de la tangente $x = 0$; pour un point immédiatement voisin de l'origine, la coordonnée x est infiniment petite vis-à-vis de la coordonnée y. On doit dans ce cas, puisqu'il ne s'agit que de fonctions *algébriques,* et conformément aux principes élémentaires applicables à ces fonctions, poser en fait qu'il existe certaines puissances de y

---

(¹) Nous ferons connaître à la fin de ce Chapitre une autre méthode indiquée par Nöther pour la résolution algébrique et pour la caractérisation d'un point multiple.

du même ordre d'infiniment petits que x, ce qu'on peut exprimer en disant que x *est toujours comparable à une certaine puissance de* y. Or cette puissance est pour la nature de l'origine un nombre caractéristique. Comme nous prenons actuellement l'axe Y pour tangente de la courbe, dans

$$f = x + ax^2 + 2bxy + cy^2 + f^{(3)} + \ldots,$$

les termes ax^2 et $2bxy$ s'évanouissent en toute hypothèse devant x si x et y sont infiniment petits; mais il n'en est pas nécessairement de même de y^2. *Si donc nous supposons préalablement* $c \lesseqgtr 0$, nous obtiendrons le cas le plus simple, *celui où x est comparable à* y^2.

Alors nous pouvons remplacer la courbe dans le voisinage de l'origine par la parabole

$$(6) \qquad 0 = x + cy^2.$$

Cette circonstance est, par suite, caractéristique d'un contact simple avec l'axe Y. Si, au contraire, l'origine est un *point d'inflexion,* la polaire quadratique doit renfermer comme facteur la tangente d'inflexion $x = 0$, c'est-à-dire que, dans $f^{(2)} = ax^2 + 2bxy + cy^2$, *$c$ doit être nul.*

Nous avons alors, en introduisant de nouveau pour un instant la troisième variable z,

$$f = xz^{n-1} + (ax + 2by)xz^{n-2} \\ + (\alpha x^3 + 3\beta x^2 y + 3\gamma xy^2 + \delta y^3)z^{n-3} + \ldots.$$

Ici nous pouvons, par un changement de situation de $z = 0$, faire disparaître entièrement les termes du second ordre. Il suffit de poser

$$z = z' - \frac{ax + 2by}{n-1}.$$

Les termes du second ordre disparaissent en effet, et il reste une expression de la forme

$$f = xz'^{n-1} + (\alpha' x^3 + 3\beta' x^2 y + 3\gamma' xy^2 + \delta' y^3)z'^{n-3} + \ldots.$$

Dans le voisinage de l'origine, x sera, cette fois encore, d'un ordre d'infiniment petits plus élevé que y; nous pouvons donc négliger

les termes $\alpha' x^3$, $3\beta' x^2 y$, $3\gamma' x y^2$, et x devient comparable à y^3. *La courbe peut donc, dans le voisinage d'un point d'inflexion, être remplacée par une courbe*

$$(7) \qquad x + \delta y^3 = 0.$$

Un point double ne donne rien de particulier, car nous pouvons remplacer un point semblable par deux courbes de la forme (6) ; il en est autrement pour un *point de rebroussement*. Dans un point de cette nature, nous avons

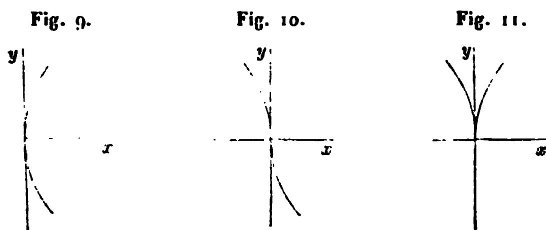
$$f = x^2 + d y^3 + \ldots;$$

x^2 devient comparable à y^3 ou x à $y^{\frac{3}{2}}$ et *la courbe peut être remplacée par*

$$(8) \qquad x^2 + d y^3 = 0.$$

Les équations (6), (7), (8) nous représentent les trois types fondamentaux précités. La première courbe (*fig.* 9) court d'un seul côté de l'axe Y et est symétrique par rapport à l'axe X, la seconde est située symétriquement par rapport aux deux axes de coordonnées (*fig.* 10) tandis que la troisième a son cours d'un seul côté de l'axe X et est située symétriquement par rapport à l'axe Y (*fig.* 11, où d est pris négativement) ([1]).

Revenons maintenant au problème posé : étudier une courbe



dans le voisinage d'un point multiple d'ordre k. Si l'origine est un point singulier de cette espèce, le développement de f com-

([1]) Pour ce qui concerne l'étude des points singuliers, nous renverrons encore à un Mémoire de STOLZ (*Math. Annalen*, t. VIII).

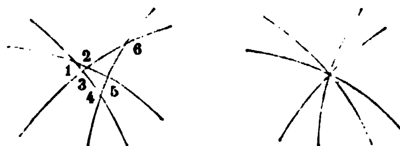
mence par le terme $f^{(k)}$. L'équation

$$(9) \qquad f^{(k)} = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} y + \dots \quad + a_k y^k = 0$$

donne les k tangentes du point, tangentes que nous devons déterminer d'abord. Le cas le plus simple est celui où l'équation du $k^{\text{ième}}$ degré a toutes ses racines différentes; la singularité du point multiple est alors épuisée par la recherche de ces racines, à moins que des branches particulières n'aient au point multiple une inflexion, ce qui nécessiterait un examen plus approfondi. *Alors nous pouvons imaginer que le point multiple tire son origine de la réunion de* $\frac{k(k-1)}{2}$ *points doubles.* On le reconnaît immédiatement si l'on trace les différentes branches de la courbe de telle manière qu'elles ne passent pas exactement par le même point, ainsi qu'il a été fait dans la figure ci-jointe pour un point quadruple. Le nombre $\frac{k(k-1)}{2}$ donne précisément le nombre de points d'intersection des k différentes branches (*fig.* 12).

Supposons au contraire que, par exemple, r des racines de l'équation (9) soient égales; nous avons à établir d'une manière précise les relations respectives des r branches qui ont une tangente commune. Afin d'y parvenir, nous prendrons comme axe Y cette tan-

Fig. 12.



gente qui compte z fois; l'équation de la courbe devient par là

$$(10) \qquad f = x^r \varphi^{(k-r)} + f^{(k+1)} + f^{(k+2)} + \dots = 0.$$

Cela admis, x est encore, dans le voisinage du point considéré, d'un ordre d'infiniment petits plus élevé que y, et notre problème est de rechercher dans f tous les termes qui sont comparables à $x^r y^{k-r}$. *Leur somme, égalée à zéro, représente une courbe qui peut être substituée à f dans le voisinage de l'origine, en tant qu'il s'agit uniquement des r branches de f qui touchent l'axe* Y.

La fonction φ est en effet de la forme

$$\varphi^{(k-r)} = \alpha_0 y^{k-r} + \alpha_1 y^{k-r-1} x + \ldots \quad + \alpha_{k-r} x^{k-r};$$

et dans cette expression le terme en y^{k-r} ne doit pas manquer, car autrement φ renfermerait un autre facteur x, tandis que ce facteur est supposé entrer seulement r fois dans $f^{(k)}$. Tous les autres termes de φ renferment des facteurs x et sont par suite négligeables vis-à-vis du premier. C'est donc dans les fonctions $f^{(k+1)}, f^{(k+2)}, \ldots$ qu'il faut chercher les termes comparables à $x^r y^{k-r}$; et l'on ne doit même avoir égard qu'à des termes de la forme $x^p y^q$, pour lesquels on a $p \leqq r$. La somme de ces termes, égalée à zéro, représente notre courbe en première approximation. Cette nouvelle courbe se composera encore de différentes branches, et sur chaque branche x et y auront, quant à leur ordre infinitésimal, un rapport déterminé; sur chacune, x sera comparable à une puissance déterminée de y, telle que $y^{\frac{\beta}{\alpha}}$, ou, ce qui est identique, x^α sera comparable à y^β. Nous allons maintenant indiquer une règle au moyen de laquelle on peut trouver ces nombres α, β, de manière à résoudre ainsi la courbe en différentes branches. C'est à quoi conduit la considération suivante. Supposons d'abord le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ connu pour une certaine branche. Introduisant ensuite une quantité ε comme mesure d'infiniment petits, nous pouvons poser

$$\begin{matrix} \lim x = \varepsilon^\beta \\ \lim y = \varepsilon^\alpha \end{matrix} \quad (\beta > \alpha),$$

car on a alors à la limite $\varepsilon = x^{\frac{1}{\beta}}$, d'où $y = \varepsilon^\alpha = x^{\frac{\alpha}{\beta}}$, c'est-à-dire que y^β est comparable à x^α, conformément à l'hypothèse. Pour un terme quelconque de f on a, par conséquent,

$$x^p y^q = \varepsilon^{p\beta+q\alpha}.$$

Si l'on impose maintenant la condition que $x^p y^q$ devienne infiniment petit d'un ordre déterminé, le nombre $p\beta + q\alpha$ devra avoir une valeur constante déterminée, d'où, par exemple,

$$p\beta + q\alpha = \mu.$$

Nous avons par conséquent ce théorème :

Si x^α et y^β sont du même ordre d'infiniment petits, tous les termes $x^p y^q$, qui deviennent par cette supposition de l'ordre infinitésimal μ, sont déterminés par la condition

$$p\beta + q\alpha = \mu. \tag{11}$$

La théorie des nombres apprend à obtenir d'une manière effective les nombres en question p et q ; ce problème revient à la résolution de la congruence

$$p\beta \equiv \mu \pmod{\alpha},$$

résolution toujours possible dans notre cas, parce que α et β, dont le quotient entre seul en considération, peuvent être supposés premiers entre eux. Pour notre but, les seules valeurs qui puissent être employées sont naturellement celles pour lesquelles $p+q$ est plus petit que n, n désignant l'ordre de la courbe étudiée. *Nous avons maintenant à choisir μ aussi petit que possible,* car il s'agit pour nous de trouver les termes vis-à-vis desquels tous les autres sont d'un ordre plus élevé d'infiniment petits. Nous pouvons nous faire une idée claire de la question en employant un moyen géométrique auxiliaire ([1]). Si nous considérons, en effet, les nombres entiers p, q respectivement comme l'abscisse et l'ordonnée d'un point du plan, nous pouvons admettre que chaque terme est figuré par un point ayant p, q pour coordonnées. L'équation (11) représente alors une ligne droite, et nous pouvons considérer le nombre μ comme la mesure de la distance de cette droite à l'origine, car la distance dont il s'agit est, comme on sait, égale à

$$\frac{\mu}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Donc, dans cette représentation géométrique, tous les points,

---

([1]) Ce procédé a été donné par Newton, d'abord pour représenter approximativement y en fonction de x, une équation $f(x, y) = 0$ étant donnée (voir *Methodus functionum et serierum infinitarum ;* London, 1736. (*Opuscula,* ed. Castillon, t. I, p. 37 et suiv.) Il en a été fait usage pour la théorie des courbes par Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques ;* 1750. *Voir* aussi, pour ce qui suit, Puiseux. *Recherches sur les fonctions algébriques* [*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* t. XV, 1850 (traduit en allemand par Fischer, Halle, 1861, p. 24 et suiv.)].

tels que les termes correspondants de f deviennent infiniment petits du $\mu^{ième}$ ordre si x^α est comparable à y^β, sont rangés sur une droite située à la distance $\frac{\mu}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ de l'origine.

Tout terme d'ordre d'infiniment petits supérieur, auquel par suite correspond une valeur μ' plus grande que μ, est situé du côté de la ligne (11) opposé à l'origine. Pour trouver les termes de l'ordre *le moins élevé,* nous aurons, d'après cela, à procéder de la manière suivante. Soit y^s le terme du degré le moins élevé ne renfermant pas x. Il lui correspond un point à la distance s sur l'axe des ordonnées; par ce point et par un autre, dont les nombres caractéristiques $p=\pi$, $q=\varkappa$ sont aussi petits que possible, menons une ligne droite située à une distance μ de l'origine (*voir* ci-après *fig.* 13). Tous les autres points p, q doivent donc être situés du côté de cette ligne de jonction opposé à l'origine. Cette dernière ligne passera encore (quoiqu'il n'en soit pas toujours ainsi) par une série d'autres points qui sont situés entre π, $\varkappa$ et o, s, auxquels correspondent des termes de f; la somme des termes de cette espèce,

$$K_1 = \Sigma\Sigma a_{pq} x^p y^q = 0, \tag{12}$$

nous donne une courbe telle, que, pour ses branches passant par le point multiple, x^α est comparable à y^β, α et β étant déterminés par

$$\pi\beta + \varkappa\alpha = \mu,$$
$$\alpha s = \mu.$$

Si nous posons ensuite $x = x'^\beta$, $y = y'^\alpha$, l'équation (12) se transforme en une équation homogène du degré p en x', y' (forme binaire), car alors $x^p y^q$ devient égal à $x'^{\beta p} y'^{\alpha q}$. Lorsque toutes les racines $\frac{x'}{y'}$ de cette équation sont différentes, $K_1 = 0$ représente une série de branches qui ont un contact simple à l'origine, et dont chacune est figurée suivant sa forme par le type de la parabole. Quand au contraire il existe plusieurs groupes de racines égales entre elles, ces branches se résoudront en classes dont la détermination se fera ensuite par la répétition de considérations tout à fait semblables. Mais ce n'est qu'un peu plus tard que nous approfondirons ce sujet.

Du point $\pi, \varkappa$ passons maintenant à un point $\pi', \varkappa'$ situé de l'autre côté de la ligne $\alpha q + \beta p = \mu$, mais aussi près que possible de cette ligne. La droite qui joint les deux points renfermera une seconde série de termes, et l'équation correspondante

$$(13) \qquad K_2 = 0$$

représente un système de branches pour lesquelles, dans le voisinage de l'origine, $x^{\alpha'}$ est comparable à $y^{\beta'}$. On a alors

$$\pi\beta' + \varkappa\alpha' = \mu',$$
$$\pi'\beta' + \varkappa'\alpha' = \mu',$$

μ' désignant la distance de la nouvelle ligne à l'origine, et, en vertu de notre construction, il n'existe aucun terme pour lequel le rapport $\frac{\alpha'}{\beta'}$ serait le même, tandis que μ' aurait une valeur plus petite. En continuant ce procédé, nous obtenons une série de lignes dont la réunion forme un polygone. Ce polygone tourne sa convexité du côté des deux axes de coordonnées, en sorte que tous les points qui correspondent à des termes de f sont séparés des axes par le polygone ou sont situés eux-mêmes sur les côtés du polygone. A ces côtés correspond une série de courbes

$$K_1 = 0, \quad K_2 = 0, \quad K_3 = 0, \quad \ldots.$$

Chacune d'elles réunit les termes qui pour une valeur déterminée $\frac{\alpha}{\beta}$ sont de l'ordre infinitésimal le moindre possible. La dernière des droites passe par le point $p = r$, $q = k - r$, car nous n'avons besoin de considérer aucun des termes pour lesquels p est plus grand que r. Le polygone est alors fermé par rapport à l'axe des abscisses. La continuation ultérieure du procédé ne conduirait du moins plus à des branches de courbe qui touchent l'axe $x = 0$.

Considérons comme exemple [1] la courbe

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x,y) \equiv x^6 y + a x^7 + b x^2 y^5 \\ \qquad + c x^8 + d x^4 y^4 + e x y^7 + f x^4 y^5 + g y^9 + h y^{10} = 0, \end{array} \right.$$

courbe du dixième ordre avec point sextuple à l'origine. Nous

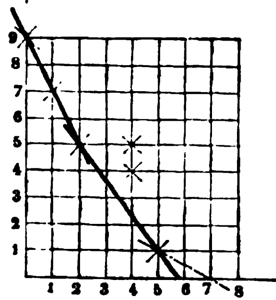
[1] *Voir* aussi les exemples traités aux notes des pages 27 et 29.

pouvons, en premier lieu, négliger tous les termes dans lesquels l'exposant de x est plus grand que 5, car ces termes s'évanouissent en toute hypothèse devant x^5y; nous négligeons de même le terme en y^{10}, car notre construction commence par y^9. Nous conservons ainsi une courbe du neuvième ordre

$$(15) \qquad x^5y + bx^2y^5 + dx^4y^4 + exy^7 + fx^4y^5 + gy^9 = 0.$$

Les termes de cette équation sont marqués d'un signe dans la figure ci-jointe (*fig.* 13). Nous avons d'abord à réunir le point 0, 9

Fig. 13.

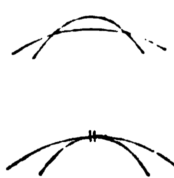


au point 2, 5; la ligne de jonction passe aussi par 1, 7. Par suite, après séparation du facteur y^5, l'équation

$$(16) \qquad K_1 = bx^2 + exy^2 + gy^4 = 0$$

représente une courbe du quatrième ordre qui remplace deux branches de (14) dans le voisinage de l'origine, et qui a en ce point ce qu'on appelle un *contact avec elle-même*. L'axe X l'y rencontre en deux points coïncidents, l'axe Y en quatre : nature de singu-

Fig. 14.



larité qui prend naissance dans le rapprochement de deux points doubles (*fig.* 14). Nous obtiendrons avec plus de précision le cours

des deux branches en posant dans (16), d'après le procédé indiqué plus haut, $x = x'^2$, $y = y'$ ou $x = x'$, $y^2 = y'$, et en résolvant l'équation du second degré. Par là, K_1 se décompose en deux facteurs

$$x' - m_1 y', \quad x' - m_2 y',$$

et nous pouvons conséquemment remplacer $K_1 = 0$ par deux équations du type de la parabole (6),

$$x - m_1 y^2 = 0, \quad x - m_2 y^2 = 0,$$

en supposant que m_1 et m_2 soient différents l'un de l'autre.

Conformément à notre règle, nous avons ensuite à joindre par une droite le point 2, 5 au point 5, 1. Cette ligne ne renferme plus aucun point marqué. Nous avons donc, après séparation du facteur $x^2 y$, la courbe

$$(17) \qquad K_2 = x^3 + b y^4 = 0.$$

Pour les branches ainsi approximativement représentées de la courbe (14), x^3 se trouve comparable à y^4. La courbe a à l'origine un point triple dont les trois tangentes se confondent avec $x = 0$; les trois branches sont adossées à l'axe, chacune à la manière d'une parabole. On a d'ailleurs

$$x = \sqrt[3]{-by^4},$$

et, par conséquent, deux des branches sont imaginaires et une réelle.

Toutes les branches de la courbe proposée qui touchent l'axe Y sont par là complétement déterminées. Nous pouvons ainsi, en continuant notre procédé, obtenir une équation d'approximation pour la branche du point sextuple qui touche l'axe X. Nous devons dans ce but tirer de (14) pour le porter dans (15) le terme ax^7, et tracer encore la ligne 5, 1 — 7, 0. Cette ligne ne renferme plus de point marqué, et la branche cherchée est, après séparation d'un facteur x^5,

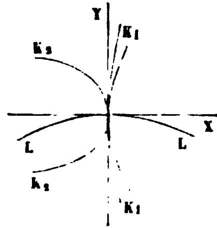
$$L = y + ax^2 = 0;$$

elle appartient, par suite, au type de la parabole. Les différentes branches réelles du point sextuple sont donc disposées comme le montre la *fig.* 15 (¹).

(¹) Dans la *fig.* 49, on a supposé que a, b, m_1, m_2 sont des grandeurs positives.

Il peut toutefois arriver, dans des cas particuliers, que l'expression K_1 de notre exemple soit un carré parfait. Alors le premier procédé d'approximation ne suffit plus pour séparer les deux

Fig. 15.



branches de la courbe, qui ont dans cette circonstance un contact d'ordre plus élevé l'une avec l'autre. En général, il peut se faire que l'une des équations $K = 0$ (12) et (13), par l'effet de l'introduction des variables x', y', donne naissance à une équation

$$\varphi(x', y') = 0,$$

renfermant un facteur linéaire multiple

$$x' - my'$$

(ou plusieurs). Pour séparer les branches correspondantes de la courbe, nous réintroduirons x, y et nous aurons alors approximativement

$$x^\alpha - m^{\alpha\beta} y^\beta = 0.$$

Si l'on pose donc ensuite $y = \eta^\alpha$, il vient

(18) $$x = m^\beta \eta^\beta + \xi,$$

ξ étant une grandeur d'un ordre d'infiniment petits plus élevé que η^β. Nous avons à faire cette substitution dans $f(x, y)$ pour déterminer approximativement ξ en fonction de η, et, dans ce calcul approximatif de η, on doit encore séparer les termes d'ordre plus élevé suivant la règle de Cramer. Si dans les différentes classes ainsi obtenues se présentent encore des équations renfermant un facteur linéaire multiple $\xi^{\alpha'} - m'^{\gamma'} \eta^{\beta'}$, il faudra encore traiter ce facteur de la même manière. On arrivera toujours en fin de compte,

par substitution des valeurs ξ, η dans (18), *à un développement de x suivant les puissances fractionnaires ascendantes de y*, développement qui caractérise la manière d'être des différentes branches. Nous éclaircirons encore ceci immédiatement par un exemple. Supposons que dans la courbe précédente $f(x,y)=0$ l'expression K_1 (16) devienne un carré parfait, que nous ayons, par suite,

$$K_1 = bx^2 + exy^2 + gy^4 = (ux + vy^2)^2.$$

D'après la règle que nous venons de donner, nous devons alors poser ($\alpha = 1, \beta = 2$)

$$x = -\frac{v}{u}\eta^2 + \xi, \quad y = \eta,$$

ce qui donne, si nous négligeons tous les termes plus élevés,

$$\begin{aligned} f(x,y) = &-\frac{v^5}{u^5}\eta^{11} + \ldots + a\left(-\frac{v^7}{u^7}\eta^{14} + \ldots\right) + c\left(\frac{v^8}{u^8}\eta^{16} + \ldots\right) \\ &+ d\left(\frac{v^4}{u^4}\eta^{12} + \ldots\right) + f\left(\frac{v^4}{u^4}\eta^{13} + \ldots\right) + h\eta^{10} \\ &+ \eta^5(-v\eta^2 + u\xi + v\eta^2)^2. \end{aligned}$$

En chassant le facteur η^5 et ordonnant autrement, nous avons l'équation

$$(19)\qquad u^2\xi^2 + h\eta^5 - \frac{v^5}{u^5}\eta^6 + d\frac{v^4}{u^4}\eta^7 + f\frac{v^4}{u^4}\eta^8 - a\frac{v^7}{u^7}\eta^9 + c\frac{v^8}{u^8}\eta^{11} = 0.$$

Faisant usage de notre règle figurative, nous n'avons à considérer que la ligne qui joint les points 2, 0 et 0,5, et par conséquent la classe unique

$$K' = u^2\xi^2 + h\eta^5 = 0,$$

d'où résultent pour ξ les deux valeurs

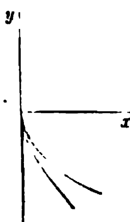
$$\xi = \pm\sqrt{-\frac{h}{u^2}\eta^5};$$

la séparation des deux branches paraboliques de la classe K_1 est alors achevée. Pour un de leurs points dans le voisinage de l'origine, nous obtenons le développement

$$(20)\qquad x = -\frac{v}{u}y^2 \pm \frac{1}{u}\sqrt{-hy^5}.$$

En ce qui concerne la forme des branches ainsi séparées, voici ce qui a lieu. Supposons que h soit une grandeur positive ; $\sqrt{-hy^5}$ ne devient réel que pour des valeurs négatives de y. Les valeurs ainsi obtenues pour x ne sont donc réelles, en supposant u et v eux-mêmes réels, que lorsque y prend des valeurs négatives ; autrement dit, les deux branches de la classe K_1 qui se touchent à l'origine sont situées du côté négatif de l'axe Y sans franchir l'axe X. La chose se produit suivant le type du point de rebroussement si l'une des valeurs de x est positive, l'autre négative. Mais, si le rapport de grandeur de v et de h est de telle nature que les *deux* valeurs de x aient le même signe, les deux branches de courbe sont situées du même côté de l'axe Y. *Elles forment un rebroussement de seconde espèce* (*fig.* 16) ; c'est ainsi qu'on appelle cette singu-

Fig. 16.



larité, par opposition au rebroussement ordinaire ou de première espèce.

Si l'on suppose au contraire que dans $f(x, y) = 0$ le terme en y^{10} manque ($h = 0$) et que conséquemment l'objet de la recherche soit une courbe du neuvième ordre, l'application de la règle de Cramer à l'équation (19) donne la classe unique

$$K' = u^2 \xi^2 - \frac{v^5}{u^3} \eta^6 = 0,$$

d'où

$$\xi = \pm \frac{\eta^3}{u} \sqrt{\frac{v^5}{u^3}},$$

et par conséquent

$$(21) \qquad x = -\frac{v}{u} y^2 \left(1 \mp y \frac{v}{u^2} \sqrt{\frac{v}{u}}\right).$$

Dans ce cas, les deux branches ont un cours symétrique par rapport à l'axe X, suivant le type de la parabole.

Il en sera de même en général, et après que la séparation de toutes les branches de courbe a été effectuée, on obtient, comme résultat final, *un développement en série suivant les puissances fractionnaires ascendantes de y, développement ayant la forme*

$$(22) \qquad x = c\,y^{\frac{\alpha}{\beta}} + c_1\,y^{\frac{\alpha'}{\beta\beta'}} + c_2\,y^{\frac{\alpha''}{\beta\beta'\beta''}} + \dots$$

Chaque terme a autant de valeurs différentes que l'indique le dénominateur de l'exposant; aux différentes valeurs de x correspondent autant de branches séparées de la courbe $f = 0$. Le cas où l'exposant d'un terme serait entier n'est ici pas exclu, car alors le coefficient de ce terme est toujours irrationnel et donne par suite une série de valeurs irrationnelles, comme par exemple dans l'équation (21). En général, pour la caractérisation de la forme d'une branche dans le voisinage de l'origine, le premier terme fournit déjà une base de mesure, et, dans une première approximation, cette forme dépendra de la question de savoir si les nombres α et β sont pairs ou impairs séparément ou simultanément. *Nous avons d'après cette idée, en généralisant nos dénominations précédentes, les trois types fondamentaux qui suivent :*

(I) $x^{2h+1} = y^{2k}$ *type de la parabole* (*fig.* 9),

(II) $x^{2h+1} = y^{2k+1}$ *type du point d'inflexion* (*fig.* 10),

(III) $x^{2h} = y^{2k+1}$ *type du point de rebroussement* (*fig.* 11).

En s'attachant spécialement aux grandeurs réelles, on pourrait enfin ajouter encore *un quatrième type, celui du rebroussement de deuxième espèce*, dont l'équation (20) nous a fourni un exemple. Ce type est, en général, caractérisé par la circonstance que dans le développement en série une racine paire doit être extraite d'une puissance impaire, et que, par suite des valeurs particulières des constantes, le signe de cette racine reste sans influence sur le signe de x. Dans ce cas, les branches en question deviennent imaginaires d'un côté de l'axe X de la manière énoncée. Il est d'ailleurs à observer que la méthode développée par nous distingue uniquement au point de vue du réel ou de l'imaginaire (p. 43) le dernier cas des autres qui sont caractérisés par des

développements en série analogues. Pour pouvoir aussi représenter intuitivement les résultats imaginaires, il est nécessaire d'employer ce qu'on appelle la *surface de Riemann,* ainsi qu'on le fait dans la théorie des fonctions; mais nous ne pouvons ici insister davantage sur ce point.

Observons spécialement, comme résultat de la recherche effectuée ici, qu'une branche réelle d'une courbe algébrique ne peut jamais être interrompue, ou que, ce qui est la même chose :

A partir de chaque point d'une courbe algébrique, il existe toujours sur la courbe un nombre pair de directions d'avancement différentes, parmi lesquelles plusieurs peuvent être indéfiniment rapprochées (comme dans les points de rebroussement).

La méthode que nous avons employée pour l'étude d'un point singulier, et d'après laquelle on place l'origine au point en question et l'on développe suivant les puissances de x, y, va nous servir à établir un théorème important, souvent appliqué et démontré rigoureusement par Nöther [1].

Nous avons déjà, à plusieurs reprises, fait usage de la proposition d'après laquelle l'équation d'une courbe $f = 0$ qui passe par les points d'intersection de deux courbes $\varphi = 0$, $\psi = 0$ peut toujours être mise sous la forme

$$f \equiv A\varphi + B\psi = 0,$$

$A = 0$, $B = 0$ étant également des équations de courbes. Or ce fait n'est vrai sans restriction qu'autant que dans les points d'intersection de φ et de ψ aucune de ces courbes ne possède de point multiple. Dans les autres cas, certaines conditions doivent être remplies pour que la représentation précédente de f soit possible, et nous nous proposons dans ce qui suit d'établir ces conditions.

Nous rechercherons, dans ce but, le mode d'existence d'une courbe $f \equiv A\varphi + B\psi = 0$ dans le voisinage d'un point P où se coupent deux courbes $\varphi = 0$, $\psi = 0$, et où la première possède un point multiple d'ordre q, la seconde un point multiple d'ordre r, en sorte que rq des intersections des deux courbes s'y trouvent réunies ;

---

[1] *Ueber einen Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen* (*Göttinger Nachrichten*, 1872, p. 490, ou *Math. Annalen*, t. VI, p. 352).

soit, pour préciser, $r \geqq q$. Nous nous bornons ici au cas où les différentes branches de φ et ψ n'ont pas de contact entre elles. Si nous prenons le point P pour origine, tous les termes de dimension $0, 1, 2, \ldots, (q-1)$ dans f s'évanouissent en toute hypothèse, et, par suite, f aura nécessairement un point multiple d'ordre q. Cette circonstance donne d'abord l'évanouissement de

$$1+2+3+\ldots+q = \frac{q(q+1)}{2} \text{ constantes,}$$

ce qui conduit incidemment au théorème suivant :

Si un point déterminé doit être un point multiple d'ordre q pour une courbe algébrique, cette condition est équivalente à $\frac{q(q+1)}{2}$ conditions linéaires, c'est-à-dire que pour une courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre on ne peut plus choisir que $\frac{n(n+3)-q(q+1)}{2}$ points arbitrairement.

Dans notre cas toutefois, pour $r > q$, se présentent encore d'autres conditions. Les termes des dimensions $q, q+1, \ldots, r-1$ dans ψ sont nuls. Les $(q+i+1)$ coefficients des termes du $(q+i)^{\text{ième}}$ ordre dans f $(i=0, 1, \ldots, r-q-1)$ dépendent donc uniquement des coefficients des termes d'égale dimension dans le produit $A\varphi$. Ces derniers termes s'obtiennent en multipliant

les termes d'ordre	q	dans φ	par les termes d'ordre	i	dans	A,
»	$q+1$	» φ	»	$i-1$	»	A,
....						,
»	$(q+i)$	» φ	»	0	»	A,

On ne peut donc représenter sous la forme $A\varphi + B\psi$ que les fonctions f dans lesquelles les $q+i+1$ coefficients des termes de la dimension $(q+i)$ peuvent s'exprimer linéairement par

$$1+2+3+\ldots+(i+1) = \frac{(i+1)(i+2)}{2}$$

quantités arbitraires (par les coefficients de A). Or les termes de la $q^{\text{ième}}$, de la $(q+1)^{\text{ième}}$, ..., de la $(r-1)^{\text{ième}}$ dimension dans f renferment

$$(q+1)+(q+2)+\ldots+r = \frac{(q+r-1)(r-q)}{2}$$

coefficients. Ce seront, en conséquence, des fonctions linéaires homogènes des

$$1+2+3+\ldots+(r-q)=\frac{(r-q+1)(r-q)}{2}$$

coefficients arbitraires des termes des dimensions $0, 1, \ldots, (r-q-1)$ dans A; ou, autrement dit, entre les coefficients des termes de la $q^{\text{ième}}$, de la $(q+1)^{\text{ième}}$, ..., de la $(r-1)^{\text{ième}}$ dimension de f devront exister les équations linéaires homogènes en nombre

$$(23)\qquad \frac{(r-q)(r+q+1)}{2}-\frac{(r-q)(r-q+1)}{2}=(r-q)q,$$

qui résultent de l'élimination des coefficients précités de A.

Mais la singularité que présentent φ et ψ au point considéré exerce encore son influence sur une série de termes d'ordre plus élevé lorsque f est représentable par $A\varphi+B\psi$. En général, les termes d'ordre k dans f s'obtiennent en multipliant

dans φ les termes d'ordre	q	par les termes d'ordre	$k-q$	dans A,
»	$q+1$	»	$k-q-1$	»
....	....	....	....	........,
»	k	»	0	»
dans ψ les termes d'ordre	r	par les termes d'ordre	$k-r$	dans B,
»	$r+1$	»	$k-r-1$	
....	....	....	....	........,
»	k	»	0	»

Nous pouvons par là déterminer le nombre des coefficients de A, B qui entrent dans les termes de la fonction $A\varphi+B\psi$ jusqu'à la $k^{\text{ième}}$ dimension inclusivement. On trouve

$$1+2+\ldots+(k-q+1)=\frac{1}{2}(k-q+2)(k-q+1) \text{ coefficients de A,}$$

et

$$1+2+\ldots+(k-r+1)=\frac{1}{2}(k-r+2)(k-r+1) \text{ coefficients de B.}$$

En tout, par conséquent, $A\varphi+B\psi$ renferme, dans les termes qui vont jusqu'à la $k^{\text{ième}}$ dimension inclusivement,

$$Q=\frac{1}{2}[(k-q+2)(k-q+1)+(k-r+2)(k-r+1)]$$

paramètres, tandis que le nombre des coefficients à exprimer par les paramètres en question dans les termes d'égale dimension de f, c'est-à-dire dans ceux qui vont de la $q^{\text{ième}}$ à la $k^{\text{ième}}$ dimension, est

$$P = \frac{1}{2}(k+q+2)(k-q+1).$$

Si nous augmentons maintenant k de 1, Q croîtra de

$$k-q+2+k-r+2$$

et les $k+2$ coefficients d'une forme binaire du $(k+1)^{\text{ième}}$ ordre s'adjoignent à P, c'est-à-dire que P s'accroît de

$$k+2.$$

La différence $P-Q$ qui indique le nombre des conditions nécessaires entre les coefficients précités de f croît, dans cette circonstance, de $k-q-r+2$; tel est, en conséquence, le nombre des conditions introduites à nouveau lorsqu'on prend en considération les termes de la $(k+1)^{\text{ième}}$ dimension en outre de ceux de la $k^{\text{ième}}$. Si donc k est, en particulier, égal à $q+r-2$, il ne s'ajoute *aucune* condition nouvelle ; autrement dit, *les coefficients des termes de la $(q+r-1)^{ième}$ dimension de f ne sont plus influencés par le point singulier.*

En conséquence, si nous posons $k=q+r-2$, il vient

$$P-Q = rq + \frac{1}{2}q(q+1).$$

C'est là le nombre total des équations linéaires nécessaires ; parmi elles sont comprises les $(r-q)q$ indiquées dans (23). Comme en outre $\frac{1}{2}q(q+1)$ conditions sont imposées par le point multiple d'ordre q que f possède en P, nous avons démontré le théorème suivant :

Si deux courbes $\varphi=0$, $\psi=0$ ont respectivement en un de leurs points d'intersection P *un point multiple d'ordre q et un point multiple d'ordre r $(r>q)$, il faut, pour qu'une courbe passant par les points d'intersection de φ et de ψ puisse être représentée sous la forme*

$$f \equiv A\varphi + B\psi = 0,$$

que cette courbe ait en P *un point multiple d'ordre* q, *et que, si ce dernier point est pris pour origine, les coefficients de* f *jusqu'à la* $(r+q-1)^{\text{ième}}$ *dimension exclusivement satisfassent à* $rq - \frac{1}{2} q(q+1)$ *équations de condition linéaires homogènes.*

La réciproque de ce théorème est vraie, c'est-à-dire que les rq conditions trouvées sont *suffisantes* pour que l'on puisse représenter f sous la forme $A\varphi + B\psi$. Nous démontrerons ce dernier point de la manière suivante (¹). Si les rq conditions trouvées sont satisfaites, on peut toujours trouver deux séries a, b procédant suivant les puissances entières et positives de x et telles que l'on ait $f = a\varphi + b\psi$. Si donc nous remplaçons l'origine par un point quelconque, il nous suffira de démontrer le théorème suivant :

Soit α, β *un système de solutions des équations* $\varphi = 0$, $\psi = 0$; *soient* a, b *deux développements procédant suivant les puissances entières positives et ascendantes de* $(x-\alpha)$ *et* $(y-\beta)$. *Pour que* f *soit de la forme* $A\varphi + B\psi$, *il faut et il suffit que l'on puisse déterminer* a *et* b *par la condition*

$$f = a\varphi + b\psi. \tag{24}$$

Supposons en premier lieu $\varphi = x$. Groupons dans f, ψ et B les termes indépendants de x, et écrivons

$$f = xf' + F(y), \quad \psi = x\psi' + \Psi(y), \quad B = xB' + \mathfrak{B}(y).$$

En faisant le même groupement dans $(A\varphi + B\psi)$ et retenant seulement les termes indépendants de x, on obtient

$$F(y) = \mathfrak{B}(y)\,\Psi(y),$$

c'est-à-dire que, *pour l'exactitude de l'équation* $A\varphi + B\psi = 0$, *en supposant* $\varphi = x$, *il est nécessaire que la partie indépendante de* x *dans* f *soit divisible par la partie indépendante de* x *dans* ψ.

Cette condition est suffisante, comme on le voit immédiatement.

Soit β une racine de $\Psi(y)$. Supposons la condition (24) remplie

(¹) *Voir* HALPHEN, *Sur une proposition d'Algèbre* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. V, p. 160).

pour le système (o, β). On conclut de là, par le même raisonnement,

$$F(y) = b_1 y \Psi(y),$$

b_1 étant une série convergente dans le voisinage de $y = \beta$. Il s'ensuit que F contient le facteur $(y - \beta)$ au moins à la même puissance que Ψ.

Si maintenant il en est de même pour chaque racine de Ψ, il en résulte que F est divisible par Ψ. Donc *la proposition annoncée est prouvée pour le cas où l'on a* $\varphi = x$. Au moyen d'une substitution linéaire, on en conclut que *la proposition est prouvée aussi pour le cas où* φ *est un trinôme du premier degré en* x, y.

Arrivons maintenant au cas général. Supposons pour un instant les coefficients de φ variables, et faisons-les varier de telle sorte que le système de solutions (α, β), multiple d'ordre rq, se change en rq systèmes différents (α_1, β_1), (α_2, B_2), ... Soient P_1, P_2, ... des trinômes du premier degré assujettis simplement aux conditions de s'évanouir, P_1 pour $x = \alpha_1$, $y = \beta_1$, P_2 pour $x = \alpha_2$, $y = \beta_2$, ...

En même temps, un second système de solutions (α', β'), multiple d'ordre $r'q'$, se change en $r'q'$ systèmes différents. Soient de même P'_1, P'_2, ... des trinômes assujettis à des conditions analogues, et ainsi de suite.

Soient Π le produit de tous ces trinômes, et φ' le polynôme φ dont on a fait varier les coefficients. Toutes les solutions communes à $\varphi' = 0$ et $\psi = 0$ étant simples, nous avons

$$\Pi = A'\varphi' + B'\psi',$$

A' et B' étant des polynômes entiers. Cette relation subsiste à la limite lorsque $\varphi' = \varphi$. Alors P_1, P_2, ... s'évanouissent pour $x = \alpha$, $y = \beta$, et ainsi des autres.

De là cette proposition préparatoire :

Si P_1, P_2, ... *sont des trinômes du premier degré en* x, y *assujettis simplement à s'évanouir pour* $x = \alpha$, $y = \beta$; *si* P'_1, P'_2, ... *sont de même des trinômes assujettis à s'évanouir pour* $x = \alpha'$, $y = \beta'$, *et de même pour chaque solution commune à* $\varphi = 0$, $\psi = 0$, *on peut choisir le nombre de ces trinômes de manière à avoir, en désignant par* Π *leur produit, et quel que soit le polynôme*

entier f,

$$\Pi f = C\varphi + D\psi,$$

C et D étant aussi des polynômes entiers.

Supposons maintenant la condition (24) remplie aux environs de (α, β). Il résulte alors de l'équation que nous venons d'écrire et dans les mêmes limites

$$(a\Pi - C)\varphi + (b\Pi - D)\psi = 0,$$

et par suite

$$C = a\Pi + c\psi,$$

c désignant un développement analogue à a.

Considérons séparément dans Π le facteur P_1. Les solutions communes à $P_1 = 0$ et $\psi = 0$ autres que (α, β) sont toutes simples et ne font pas évanouir φ; elles font donc évanouir C, suivant l'une des équations précédentes. En ce qui concerne la solution α, β, l'équation $C = a\Pi + c\psi$ peut être envisagée comme exprimant que la condition (24) est remplie à l'égard de P_1, ψ; C, jouant le rôle de φ, ψ, f. D'ailleurs, P_1 est un trinôme du premier degré. Donc, d'après un résultat précédent,

$$C = C_1 P_1 + B\psi,$$

C_1 et B désignant des polynômes entiers.

La dernière valeur de C portée dans $\Pi f = C\varphi + D\psi$ conduit à

$$\Pi f = C_1 P_1 \varphi + (D + B\varphi)\psi.$$

Comme Π contient le facteur P_1, le coefficient de ψ dans cette dernière identité contient aussi ce facteur. En le supprimant et en désignant par Π_1 le produit des autres trinômes, nous aurons

$$\Pi_1 f = C_1 \varphi + D_1 \psi.$$

Répétons sur cette équation et à l'égard de P_2 le même raisonnement, et ainsi de suite. Nous ferons ainsi disparaître du coefficient de f dans $\Pi f = C\varphi + D\psi$ tous les trinômes relatifs à la solution (α, β). Si maintenant les conditions analogues à (24) sont satisfaites par f pour toutes les solutions communes à $\varphi = 0$ et $\psi = 0$, on fera de même disparaître tous les trinômes $P', P'', \ldots$. Donc f est de la forme $A\varphi + B\psi$: c'est ce qu'il fallait démontrer.

Nous mentionnerons ici un cas spécial, fréquemment appliqué, de cette proposition. Une partie des rq conditions est satisfaite identiquement en toute hypothèse si f possède en P un point multiple d'ordre m (m étant plus grand que q), tandis que A possède simultanément un point multiple d'ordre $m-q$, et si, pour $m > r$, B possède aussi au même point P un point multiple d'ordre $m-r$, c'est-à-dire si les termes correspondants de la dimension la moins élevée en A et B manquent eux-mêmes; pour les termes de la $m^{\text{ième}}$ jusqu'à la $(r+q-2)^{\text{ième}}$ dimension, les autres relations continuent à subsister. On peut les considérer comme des conditions qui règlent la situation des diverses branches de f qui passent par P à l'égard de celles de φ et de ψ. Si donc on a $m = r+q-1$, il n'existe plus aucune condition relative au groupement de ces branches. De là ce théorème, important à cause de ses applications :

Une courbe $f=0$, qui a en un point P *un point multiple d'ordre $r+q-1$ et qui passe par les points d'intersection de deux courbes $\varphi=0$, $\psi=0$ telles que φ ait en* P *un point multiple d'ordre q, ψ un point multiple d'ordre r, peut toujours être représentée sous la forme*

$$f \equiv A\varphi + B\psi = 0,$$

$A=0$ *ayant en* P *un point multiple d'ordre $r-1$*, $B=0$ *un point multiple d'ordre $q-1$*.

III. — Dualité. — Formules de Plücker.

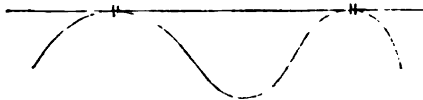
Conformément au principe de dualité, il y a lieu de tenir compte non-seulement des points singuliers, mais encore des tangentes singulières. En effet, d'après le principe cité, nous devons nous figurer toute courbe comme engendrée de deux manières différentes : comme décrite par un point mobile et comme enveloppée par une droite mobile (¹). Le point décrivant détermine dans chaque intervalle une direction, et cette direction, qui correspond

(¹) *Voir*, pour ce qui suit, Plücker, *Theorie der algebraischen Curven*; Bonn, 1839, p. 200 et suiv.

à un avancement infiniment petit, est la tangente à la courbe en l'une des positions du point décrivant. De même, la droite enveloppante détermine, par chaque changement infiniment petit de position, un point, car un tel changement peut toujours être considéré comme une rotation autour d'un point déterminé; ce sera là le point de contact de la droite considérée. Nous obtiendrons donc la courbe dont il s'agit en regardant constamment la rotation de la droite comme une fonction de l'avancement d'un de ses points. Dans cette dépendance respective des deux mouvements, quelques particularités peuvent se présenter, et c'est là ce qui donne lieu aux points et aux tangentes *singulières*. Ces circonstances se produisent, ou bien lorsque l'élément décrivant ou enveloppant atteint deux fois une seule et même position, ou bien lorsque l'un des deux éléments change le sens de son mouvement, tandis que l'autre poursuit une marche continue.

Nous avons un exemple connu du premier cas dans le *point double*, un du second dans le *point d'inflexion* (¹). Au point double correspond dualistiquement la *tangente double*, c'est-à-dire une tangente possédant deux points de contact différents (*fig.* 17), et corrélativement aux différentes espèces de *points*

Fig. 17.



multiples on distingue un même nombre d'espèces de *tangentes multiples*. Mais il est bien à remarquer qu'une tangente double ne peut pas être considérée comme une singularité en tant que l'on se figure une courbe comme un lieu géométrique de points, car nous montrerons incessamment que la courbe représentée par une équation générale en coordonnées points possède un certain nombre de tangentes doubles, et de même un point double ne doit pas davantage être considéré comme une singularité si l'on se figure la courbe comme enveloppe d'une ligne. Si maintenant

(¹) *Voir* les explications plus détaillées données p. 8.

dans un élément double se présente d'abord une indétermination à l'égard de la direction d'avancement, c'est-à-dire du choix de l'élément voisin, il n'intervient pas pour cela de discontinuité dans le mouvement du point et de la tangente, puisque l'on s'approche de l'élément double sur une branche déterminée, et que l'on considère ainsi la courbe conformément à sa description. Il en est autrement pour le point d'inflexion, la singularité consistant alors en une relation entre point et tangente, et une seule branche de courbe entrant en considération. Un fait analogue a lieu pour le point de rebroussement en vertu de la loi de dualité, car on voit immédiatement sur une figure que là le point change sa direction d'avancement, tandis que la tangente continue sa rotation dans le même sens. Nous démontrerons au surplus la chose algébriquement, et les mêmes développements sont également applicables aux singularités imaginaires.

Au moyen de la recherche *simultanée* des deux espèces de singularités, on arrive facilement à résoudre la contradiction apparente que nous avons déjà rencontrée lorsqu'il s'est agi de repasser de l'équation en coordonnées lignes d'une courbe donnée en coordonnées points à cette équation ponctuelle originaire. Nous reconnaîtrons, en effet, qu'il n'existe pas de courbe d'ordre supérieur au second ne possédant ni point multiple ni tangente multiple, et qu'au contraire *toute courbe d'un ordre plus élevé sans point multiple a nécessairement un nombre déterminé de tangentes doubles ou multiples, de même que toute courbe sans tangente multiple a nécessairement un nombre déterminé de points doubles ou multiples*. Si nous ajoutons cette remarque que le nombre $n(n-1)$ donné pour la classe d'une courbe souffre certaines exceptions par suite de la présence d'un point multiple, il est clair que, conformément au principe de dualité, l'ordre d'une courbe possédant des tangentes doubles ne doit pas être immédiatement exprimé en fonction de sa classe k par le nombre $k(k-1)$, et par là se trouve écartée la contradiction apparente signalée. Des résultats semblables se produisent à l'égard des tangentes d'inflexion et des points de rebroussement.

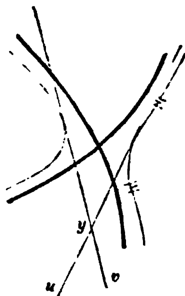
La remarque énoncée en dernier lieu relativement à l'influence des points doubles et des points de rebroussement sur la classe résulte des théorèmes démontrés plus haut sur la manière dont se

comportent les polaires en ces points (p. 24). Nous supposerons d'abord qu'il ne s'agit que de simples points doubles et de simples points de rebroussement, et nous exclurons les singularités plus élevées. La classe d'une courbe a été définie par le nombre de ses intersections avec la première polaire d'un point quelconque prise relativement à elle. Or, deux de ces intersections se trouvent réunies dans un point double, trois dans un point de rebroussement, et ces points ne doivent pas être comptés, *à proprement parler*, comme des points de contact de tangentes issues du pôle. *Chaque point double réduit donc la classe de deux unités, chaque point de rebroussement de trois, c'est-à-dire que l'on a*

$$k = n(n-1) - 2d - 3r, \tag{1}$$

formule dans laquelle d désigne le nombre des points doubles de la courbe donnée, r celui de ses points de rebroussement. En tant qu'il s'agit de points réels, on peut aussi apercevoir la nécessité de cette réduction ainsi qu'il suit. Considérons une courbe n'ayant aucun point double, mais dont deux branches sont rapprochées de telle sorte qu'au moyen d'une petite déformation on obtienne une courbe à point double. On voit clairement alors comment les deux tangentes menées d'un point y à ces branches (u et v dans la *fig.* 18) se confondent avec la ligne qui joint y au point double

Fig. 18.



quand la susdite déformation est réalisée, de sorte que cette ligne de jonction compte effectivement deux fois comme tangente improprement dite. On reconnaît immédiatement, en vertu de nos considérations précédentes sur la production d'un point de rebrous-

sement au moyen d'un point double avec boucle, que la même ligne doit être comptée trois fois en cas de point de rebroussement (p. 25).

L'équation (1) est la première d'une série de relations auxquelles satisfont les nombres caractéristiques d'une courbe, et qui sont appelées *formules de Plücker*, du nom de leur inventeur [1].

Une seconde équation de la même espèce détermine le nombre des points d'inflexion dans leur relation de dépendance avec d et r. Le nombre des inflexions est, comme on sait, égal au nombre des intersections de la courbe originaire avec sa hessienne. Mais nous savons (p. 28) qu'en un point double de la courbe originaire se trouvent réunies six de ces intersections et huit en un point de rebroussement. *Chaque point double d'une courbe réduit donc le nombre w de ses points d'inflexion de six unités, chaque point de rebroussement le réduit de huit, c'est-à-dire que l'on a* [2]

$$(2) \qquad w = 3n(n-2) - 6d - 8r.$$

Il est d'ailleurs fort possible que la courbe ait dans un point double des points d'inflexion, ainsi que cela se présente, par exemple, dans la figure connue de la lemniscate. Ces circonstances donnent lieu à un plus grand nombre d'intersections de la hessienne avec la courbe originaire au point double, mais non à d'autres réductions.

Des formules (1) et (2) on déduit d'autres formules, en vertu du principe de dualité. D'après ce principe, l'ordre et la classe se correspondent réciproquement; il en est de même du point double et de la tangente double: nous avons, par suite, à remplacer n par k, d par t, t désignant le nombre des tangentes doubles. A une tangente d'inflexion, c'est-à-dire à une droite rencontrant la

---

(1) PLÜCKER, *Solution d'une question fondamentale concernant la théorie générale des courbes* (*Journal de Crelle*, t. 12, 1834). *Voir* aussi du même auteur : *System der analytischen Geometrie*, Berlin, 1835, p. 289, et *Theorie der algebraischen Curven*, Bonn, 1839, p. 207 et suiv.

(2) Sur la *fig.* 18, on reconnaît facilement qu'un point double à tangentes réelles absorbe toujours *deux* points d'inflexion réels; ces points sont marqués dans la figure. De même, suivant la *fig.* 19, *deux* rebroussements réels sont absorbés par une tangente double à points de contact réels.

courbe en trois points successifs, correspond, en vertu des mêmes considérations, un point dans lequel se coupent trois tangentes successives, c'est-à-dire un point de rebroussement; en d'autres termes, les nombres w et r se correspondent dualistiquement dans les formules précédentes. Pour le démontrer, comparons la manière d'être des tangentes dans le voisinage d'une tangente d'inflexion avec celle des points dans le voisinage d'un point de rebroussement. Commençons par ce dernier et transportons-le à l'origine. L'équation de la courbe est alors de la forme (p. 24)

$$f = x^2 z^{n-2} + y^3 z^{n-3} + \ldots = 0.$$

Les coordonnées de la tangente d'un point x, y, z infiniment voisin de l'origine seront par suite, en négligeant les termes d'un ordre d'infiniment petits supérieur,

$$\rho u = \frac{\partial f}{\partial x} = 2xz^{n-2},$$

$$\rho v = \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 z^{n-3},$$

$$\rho w = \frac{\partial f}{\partial z} = (n-2)x^2 z^{n-3} + (n-3)y^3 z^{n-4}.$$

A l'aide de l'équation $x^2 z + y^3 = 0$, on obtient la condition

$$4v^3 - 27u^2 w = 0,$$

à laquelle satisfont les tangentes dans le voisinage du point de rebroussement : c'est une courbe de troisième classe qui représente la succession des tangentes consécutives dans le voisinage de ce point. En faisant donc abstraction du facteur numérique $\frac{4}{27}$, la courbe, dans le voisinage du rebroussement, *si on la considère comme figure engendrée par un point, est du type* $x^2 z + y^3 = 0$, *et, si on la considère comme figure engendrée par une ligne, elle est du type* $u^2 w + v^3 = 0$, $x = 0$, $y = 0$ étant les coordonnées du point de rebroussement, $v = 0$, $w = 0$ celles de sa tangente. Or, la dernière équation est la contre-partie dualistique de la forme

$$xz^2 + y^3 = 0,$$

caractéristique du point d'inflexion (p. 33), car nous avons à

remplacer w par x, u par z, puisque dans $u^2w + v^3 = 0$ les coordonnées de la tangente de rebroussement sont données par $v = 0$, $w = 0$, et que dans $xz^2 + y^3 = 0$ celles du point d'inflexion le sont par $x = 0$, $y = 0$. On arrive naturellement au même résultat en partant du point d'inflexion. L'équation de la courbe dans le voisinage d'un point de cette nature est

$$xz^2 + y^3 = 0,$$

et, par suite, les coordonnées de la tangente d'inflexion sont

$$\rho u = z^2, \quad \rho v = 3y^2, \quad \rho w = 2xz.$$

Elles satisfont à la condition

$$4v^3 - 27uw^2 = 0,$$

et, si nous remplaçons de nouveau u par z, w par x, nous avons le type du point de rebroussement. *L'équation de la courbe dans le voisinage du point d'inflexion est donc : la courbe étant considérée comme figure engendrée par un point, du type*

$$xz^2 + y^3 = 0;$$

la courbe étant considérée comme figure engendrée par une ligne, du type

$$uw^2 + v^3 = 0.$$

Donc, par rapport aux grandeurs infiniment petites, le point de rebroussement $w = 0$ se comporte comme la tangente d'inflexion $x = 0$ et le point d'inflexion comme la tangente de rebroussement.

Nous réunissons sommairement ces résultats dans le Tableau suivant, où les singularités placées en regard l'une de l'autre se correspondent dualistiquement :

Coordonnées points.	*Coordonnées lignes.*
Point double ayant deux tangentes réelles.	Tangente double dont les deux points de contact sont réels.
Point de rebroussement.	Tangente d'inflexion.
Point double ayant deux tangentes imaginaires (point isolé).	Tangente double dont les deux points de contact sont imaginaires (tangente isolée).
Point d'inflexion.	Tangente de rebroussement.

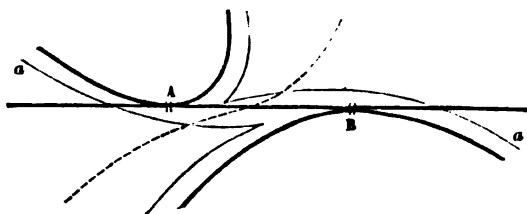
En vertu de ces développements, la transformation dualistique des équations (1) et (2) donne les deux relations suivantes :

$$(3) \qquad n = k(k-1) - 2t - 3w',$$

$$(4) \qquad r = 3k(k-2) - 6t - 8w'.$$

On peut aussi, par une voie géométrique et directe, rendre sensible aux yeux la proposition contenue dans l'équation (3), au moins tant qu'il ne s'agit que de quantités réelles, ainsi que nous l'avons fait à l'égard de l'équation (1); et l'on y parvient en partant d'une courbe qui n'a besoin que d'être un peu déformée pour acquérir une tangente double. Alors deux branches de la courbe parcourent très-près l'une de l'autre un segment AB, comme dans la *fig.* 19, pour donner naissance, après la réalisation de la transformation, à la tangente double. Les deux points de rencontre d'une droite quelconque (u) avec les branches précitées sont alors transportés sur la tangente double et doivent, comme intersections improprement dites, être retranchés du nombre $k(k-1)$. En effet, un point d'intersection de u avec la courbe est défini par la propriété qu'on peut mener de ce point à la courbe deux tangentes coïncidentes. Mais il en est ainsi pour tout point d'une tangente double. Si maintenant, dans la courbe à tangente double (*fig.* 19), on fait graduellement coïncider les deux points

Fig. 19.



de contact, on reconnaît qu'un troisième point d'intersection de u tombe sur la tangente double, cette dernière devenant tangente d'inflexion. On peut alors faire que les branches désignées par a dans la *fig.* 19 se confondent entièrement avec la tangente double, ce qui donne naissance à la courbe ponctuée dans cette figure.

Les quatre formules de Plücker (1), (2), (3), (4) montrent que

toute courbe possède réellement certaines des singularités étudiées, ainsi qu'il a été affirmé plus haut. D'ailleurs, l'équation (3) nous donne l'ordre d'une courbe en fonction de sa classe; la réduction demandée est donc due exclusivement à la présence de tangentes doubles et de tangentes d'inflexion dans toute courbe générale du $n^{\text{ième}}$ ordre. Les points d'inflexion et les points de rebroussement ne peuvent manquer simultanément que si l'on a

$$k = n, \quad d = t = \frac{n(n-2)}{2},$$

c'est-à-dire dans une espèce très-particulière de courbes d'ordre pair; pour qu'il n'y ait ni points doubles ni tangentes doubles, il faut que

$$k = n, \quad r = w = \frac{k(k-2)}{3},$$

ce qui, en faisant abstraction des courbes du second ordre, répond à une espèce particulière de courbes de l'ordre $3h$ ou $3h+2$. Les deux circonstances dont il s'agit ne peuvent être réunies pour $n > 2$.

Les quatre équations qui ont lieu entre *les trois couples de singularités ordinaires*, c'est-à-dire entre les nombres nk, dt, rw, ne sont toutefois pas indépendantes les unes des autres. Au contraire, l'une d'elles est la conséquence des trois autres, car de (1) et (2), de même que de (3) et (4), résulte l'équation, non susceptible d'être modifiée par des considérations de dualité,

$$(5) \qquad 3(k-n) = w - r.$$

Ainsi trois des six singularités sont complétement déterminées par les trois autres. Étant donnée, par exemple, une courbe d'ordre n sans point double ni point de rebroussement, on a

$$k = n(n-1),$$
$$w = 3n(n-2),$$
$$t = \frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9).$$

Nous avons précédemment déterminé les $3n(n-2)$ points d'inflexion par une courbe d'ordre $3(n-2)$ qui les traverse. D'une

manière tout à fait semblable, nous pouvons obtenir directement le nombre t en faisant connaître une courbe de l'ordre $(n-2)(n^2-9)$ qui passe par les $n(n-2)(n^2-9)$ points de contact des tangentes doubles. La possibilité de ce mode de détermination ne va nullement de soi, car nous verrons plus tard que, parmi les points d'intersection de deux courbes, il y en a toujours un certain nombre qui sont déterminés par les autres, en sorte qu'il n'est pas possible de déterminer sur une courbe algébrique un système de points au moyen d'une seconde courbe sans obtenir d'autres points d'intersection (¹).

Soit y le point de contact d'une tangente, et x un point quelconque de cette droite; on a

$$a_y^n = 0 \quad \text{et} \quad a_y^{n-1} a_x = 0.$$

De l'équation du $n^{\text{ième}}$ degré

$$(\mu a_y + \lambda a_x)^n = 0,$$

qui détermine les autres $(n-2)$ points d'intersection de la tangente, se sépare un facteur λ^2. L'équation du $(n-2)^{\text{ième}}$ degré restante aura nécessairement une racine double si la ligne $\overline{xy}$ est assujettie à être une tangente double. Nous pouvons maintenant définir le point x, entre autres manières, comme l'intersection de la tangente de y avec une droite arbitraire u_1, u_2, u_3, de telle sorte que nous ayons à remplacer les x par les déterminants mineurs formés des u_i et des grandeurs $a_y^{n-1} a_i = b_y^{n-1} b_i$. La condition que y soit le point de contact d'une tangente double est alors donnée par l'évanouissement du discriminant de l'équation

$$(6) \qquad [\mu a_y + \lambda (abu) b_y^{n-1}]^n = 0.$$

Si l'on réussit à représenter ce discriminant indépendamment des u_i, son évanouissement donnera une courbe de l'espèce demandée. Or cela est toujours en fait possible, car on peut toujours isoler

(¹) On peut aussi, toujours au moyen du principe de translation, indiquer un système de courbes qui aient les tangentes doubles pour tangentes communes, dès que l'on a sous forme symbolique la condition nécessaire pour la présence de deux racines doubles dans une forme binaire d'ordre n (*voir* la note de la p. 348 du t. I).

du discriminant $F(y, u)$ un facteur u_y^{α}. Posons en effet

$$\lambda = \rho v_y;$$

en vertu de l'identité (t. I, p. 352)

$$(abu)v_y = (avu)b_y + (abv)u_y - (bvu)a_y,$$

et à cause de $b_y^n = 0$, il résulte de (6)

$$\{[\mu - \rho(bvu)b_y^{n-1}]a_y + \rho u_y(abv)b_y^{n-1}\}^n = 0$$

ou

$$(7) \qquad [\mu' a_y + \lambda'(abv)b_y^{n-1}]^n = 0,$$

si l'on pose

$$\mu' = \mu - \rho(bvu)b_y^{n-1} = \mu - \lambda\frac{(bvu)b_y^{n-1}}{v_y},$$
$$\lambda' = \rho u_y = \lambda\frac{u_y}{v_y}.$$

Ces dernières équations donnent, pour la variable binaire $\frac{\lambda}{\mu}$, une substitution linéaire ayant pour déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{(vbu)b_y^{n-1}}{v_y} \\ 0 & \frac{u_y}{v_y} \end{vmatrix} = \frac{u_y}{v_y}.$$

Par l'effet d'une substitution linéaire, le discriminant en question ne peut éprouver d'autre modification que la multiplication par une puissance du dernier déterminant; d'ailleurs, l'expression (7) est de la même forme que l'expression (6); seulement les u ont été remplacés par les v. Nous avons en conséquence

$$F(y, u) = \left(\frac{u_y}{v_y}\right)^{\alpha} F(y, v)$$

ou

$$\frac{F(y, u)}{u_y^{\alpha}} = \frac{F(y, v)}{v_y^{\alpha}},$$

c'est-à-dire que *le quotient du discriminant et d'une puissance convenable de u_y est complétement indépendant des grandeurs arbitraires u_i*. Si donc on sépare le facteur u_y un assez grand nombre de fois pour que le reste ne comprenne plus les u_i, ce

dernier reste représentera une courbe dont il s'agit maintenant de déterminer l'ordre. C'est ce qu'on fait au moyen de la règle suivante :

Si dans une équation

$$a_0\mu^m + ma_1\mu^{m-1}\lambda + \ldots + ma_{m-1}\mu\lambda^{m-1} + a_m\lambda^m = 0$$

les coefficients a_i *sont des fonctions homogènes de* x_1, x_2, x_3, *et que les nombres* $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ *qui expriment le degré de ces fonctions forment une progression arithmétique, le discriminant est du degré* $(m-1)(\alpha_0+\alpha_m)$ *par rapport à* x_1, x_2, x_3.

Nous le démontrerons de la manière suivante. Le degré du discriminant $F(a_0, a_1, \ldots, a_m)$ est le même par rapport aux x que le degré auquel s'élève, par rapport à t, l'expression

$$F(a_0 t^{\alpha_0}, a_1 t^{\alpha_1}, \ldots, a_m t^{\alpha_m}).$$

Si maintenant les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ forment une progression arithmétique de raison β, de telle sorte que

$$\alpha_i = \alpha_0 + i\beta,$$

on a, puisque F est du degré $2(m-1)$ par rapport aux a_i,

$$F(a_0 t^{\alpha_0}, a_1 t^{\alpha_1}, \ldots, a_m t^{\alpha_m}) = t^{2(m-1)\alpha_0} F(a_0, a_1 t^{\beta}, a_2 t^{2\beta}, \ldots, a_m t^{m\beta}).$$

Mais le second membre est le discriminant d'une équation du $m^{\text{ième}}$ degré par rapport aux variables λ', μ', de laquelle procède l'équation donnée en λ, μ par la substitution linéaire

$$\lambda = t^{\beta}\lambda', \quad \mu = \mu'.$$

En vertu de la substitution, le discriminant est multiplié par la $m(m-1)^{\text{ième}}$ puissance du déterminant t^{β} de cette dernière (t. I, p. 242), c'est-à-dire que nous avons

$$F(a_0, a_1 t^{\beta}, a_2 t^{2\beta}, \ldots, a_m t^{m\beta}) = t^{m(m-1)\beta} F(a_0, a_1, \ldots, a_m),$$

d'où

$$F(a_0 t^{\alpha_0}, a_1 t^{\alpha_1}, \ldots, a_m t^{\alpha_m}) = t^{(m-1)(2\alpha_0+m\beta)} F(a_0, a_1, \ldots, a_m),$$

ou, puisque $2\alpha_0 + m\beta$ est égal à $\alpha_0 + \alpha_m$,

$$F(a_0 t^{\alpha_0}, a_1 t^{\alpha_1}, \ldots, a_m t^{\alpha_m}) = t^{(m-1)(\alpha_0+\alpha_m)} F(a_0, a_1, \ldots, a_m).$$

Ici $F(a_0, a_1, \ldots, a_m)$ ne renferme plus la quantité t; l'expression qui figure dans le premier membre est conséquemment du degré $(m-1)(\alpha_0+\alpha_m)$ en t, et, par suite, notre discriminant est d'un degré égal en x_1, x_2, x_3, ce qui était à démontrer.

Il s'agit dans notre cas de l'équation $(\mu a_y + \lambda a_x)^n = 0$, laquelle, en vertu de $a_y^n = 0$, $a_y^{n-1} a_x = 0$, se réduit à une équation de degré $n-2$. Nous devons donc poser $m = n-2$, et les coefficients de l'équation donnée sont respectivement

des degrés $(n-2)$, $(n-3)$, ..., 1, 0 par rapport aux y,
des degrés 2, 3, ..., $n-1$, n par rapport aux x.

D'ailleurs, les x_i sont du degré $n-1$ relativement aux y_i et linéaires relativement aux u_i. On a donc en tout, pour ce qui concerne les quantités x_i,

$$\alpha_0 = 3n-4, \quad \beta = n-2, \quad \text{d'où} \quad \alpha_m = n(n-1).$$

Par conséquent, le discriminant $F(y, u)$ est en y_i du degré

$$(n-3)[3n-4+n(n-1)] = (n-3)(n^2+2n-4).$$

A l'égard des quantités u_i on a simplement $\alpha_0 = 2$, $\alpha_m = n$; en conséquence, $F(y, u)$ est, par rapport aux u_i, du degré $(n-3)(n+2)$. On doit donc pouvoir séparer de $F(y, u)$ un facteur $u_y^{(n-3)(n+2)}$, de sorte que le reste est, relativement aux y, du degré

$$(n-3)(n^2+2n-4)-(n-3)(n+2) = (n-2)(n^2-9).$$

L'équation $F(y, u) = 0$ se trouve représenter une courbe qui touche la courbe donnée aux points de contact des tangentes doubles. Comme d'ailleurs sur chacune de ces tangentes existent deux points de contact, nous avons le théorème suivant, que nous nous proposions de démontrer :

Le nombre des tangentes doubles d'une courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre est en général égal à $\frac{1}{2} n(n-2)(n^2-9)$ (¹).

(¹) C'est Cayley qui a donné le premier la courbe passant par les points de contact des tangentes doubles (*Journal de Crelle*, t. 34, p. 37). Pour l'exposition qui figure au texte, *voir* un Mémoire de Jacobi, *ibid.*, t. 40, p. 37, et un de Clebsch, *ibid.*, t. 63, p. 186. La séparation effective des facteurs superflus a été faite par Hesse pour la courbe du quatrième ordre (*ibid.*, t. 36, p. 156; t. 40, p. 260; et t. 41, p. 262). Une

La réduction que subit ce nombre en vertu des formules de Plücker, par suite de la présence de points doubles ou de points de rebroussement, peut facilement être déterminée au moyen des équations que nous avons données plus haut ; on trouve la formule suivante :

$$(8)\quad \begin{cases} t = \frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)-(2d+3r)[n(n-1)-6]+2d(d-1) \\ \quad +\frac{9}{2}r(r-1)+6dr \quad (^1). \end{cases}$$

Il est possible d'écrire les formules de Plücker sous une forme particulièrement simple en introduisant, conjointement avec n, k, d, r, t, w, une septième singularité se correspondant dualistiquement à elle-même, à savoir le *genre de la courbe* [2]. Cette quantité (p) est définie par la relation

$$(9)\quad p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r = \frac{(k-1)(k-2)}{2} - t - w.$$

Nous serons conduits plus tard au sens propre de ce nombre dans la théorie des transformations à détermination unique ; nous nous en servirons seulement ici pour donner les *quatre formules de Plücker* sous la forme suivante, qui est la plus simple et celle qui se grave le plus facilement dans la mémoire [3] :

$$(10)\quad \begin{cases} 2p-2 = k+r-2n, \\ \qquad\quad = n+w-2k, \\ \qquad\quad = n(n-3)-2(d+r), \\ \qquad\quad = k(k-3)-2(t+w) \quad (^4). \end{cases}$$

---

autre méthode pour la détermination de ces courbes a pour auteur Salmon (*Quarterly Journal of mathematics*, t. III, et *Higher plane curves*, Chap. IX), et a été démontrée par Cayley (*Philosophical Transactions*, 1859, p. 193, et 1861, p. 357). *Voir* aussi l'exposition de Dersch qui repose sur les principes du Calcul symbolique (*Math. Annalen*, t. VII, p. 497).

(1) On peut aussi apercevoir géométriquement et d'une manière directe le sens de ces réductions. (*Voir*, sur ce sujet, Plücker, *Theorie der algebraischen Curven*, p. 210.)

(2) La notion du genre d'une fonction algébrique a été introduite par Riemann, *Theorie der Abelschen Functionen* (*Journal de Crelle*, t. 54) ; elle a été appliquée à la théorie des courbes, surtout par Clebsch (*ibid.*, t. 63 et 64). (*Voir* le Tome III de ces Leçons.)

(3) *Voir* Cayley (*Quarterly Journal*, t. XI, p. 185).

(4) Les nombres qui figurent dans les formules de Plücker se réfèrent sans distinc-

Ces équations donnent seulement les relations auxquelles les singularités d'une courbe algébrique doivent satisfaire en toute circonstance. *Il n'a pas été démontré jusqu'ici à l'inverse que tout système de nombres entiers qui satisfait aux formules de Plücker puisse se rencontrer réellement dans une courbe.* En général, on est seulement en situation d'indiquer pour d, r, t, w certaines limites supérieures que ces nombres ne peuvent pas franchir. On a, en particulier, le théorème suivant :

Le nombre p est nécessairement égal ou supérieur à zéro si la courbe est assujettie à ne pas se décomposer en courbes d'ordre moins élevé; en d'autres termes, on a

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} \geqq d+r$$

et

$$\frac{(k-1)(k-2)}{2} \geqq t+w.$$

Si en effet p était plus petit que zéro, si l'on avait par exemple

$$d+r = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$$

(ou une quantité plus grande), on pourrait faire passer une courbe d'ordre $n-1$ (ou proprement dite ou décomposable) par ces points doubles ou cuspidaux et par

$$\frac{(n-1)(n+2)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1 = 2n-3$$

autres points de la courbe d'ordre n. La courbe ainsi déterminée

---

tion aux singularités réelles et aux singularités imaginaires. Mais il existe aussi entre les singularités *réelles* seules, comme l'a montré Klein (*Math. Annalen*, t. X), une relation numérique déterminée. Si, en effet, w' désigne le nombre des points d'inflexion réels, t'' le nombre des tangentes doubles isolées réelles (c'est-à-dire de celles dont les deux points de contact sont conjugués imaginairement l'un par rapport à l'autre), r' le nombre des points de rebroussement réels, d'' le nombre des points doubles isolés réels, on a

$$n+w'+2t'' = k+r'+2d''.$$

Voir aussi Perrin (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. VI, p. 84).

aurait avec la courbe donnée

$$2\left[\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1\right]+2n-3=n(n-1)+1$$

points d'intersection, par conséquent un de plus que cela n'est possible lorsque des parties des deux courbes ne coïncident pas; la courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre doit donc se décomposer, et le théorème ci-dessus énoncé se trouve par conséquent démontré. Pour $p=0$, c'est-à-dire pour

$$d+r=\frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

nous avons en particulier

$$w=3(n-2)-2r,$$

et par suite aussi une limite supérieure pour le nombre des points de rebroussement, car w ne peut jamais devenir négatif. *Donc, parmi les* $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ *points doubles et points de rebroussement d'une courbe de genre nul, il ne peut se rencontrer au plus que* $\frac{3}{2}(n-2)$ *points de rebroussement.*

Appliquons maintenant les résultats acquis aux courbes les plus simples. D'abord, pour les coniques, nous n'obtenons rien de nouveau. On a, pour ces courbes,

$$d=r=w=t=0$$

et

$$k=n=2,$$

et l'on a, au contraire, $k=0$ pour $n=2$, $d=1$, c'est-à-dire que le système de deux lignes droites est de classe nulle, comme cela doit être. D'une manière analogue, on a pour le système de deux points $k=2$, $t=1$, $n=0$.

Dans les *courbes du troisième ordre* ou de la troisième classe, on a en général $p=1$; par conséquent, un point double ou un point de rebroussement *unique*, une tangente double ou une tangente d'inflexion sont seules possibles, même dans les cas particuliers. D'après cela, nous obtiendrons, en vertu des formules de Plücker, pour les singularités qui peuvent se présenter dans les

5.

courbes du troisième ordre, le Tableau suivant :

$$n = 3,$$

d	r	k	w	p
0	0	6	9	1
1	0	4	3	0
0	1	3	1	0

et d'une manière analogue, pour les *courbes de la troisième classe,*

$$k = 3,$$

t	w	n	r	p
0	0	6	9	1
1	0	4	3	0
0	1	3	1	0

Dans les *courbes du quatrième ordre* on rencontre, en outre, des tangentes doubles. Là d'ailleurs, en général, $p = 3$; il peut donc exister trois points doubles, ou même, puisque $\frac{3}{2}(n-2) = 3$, trois points de rebroussement. Nous avons en conséquence le Tableau suivant :

$$n = 4,$$

d	r	k	w	t	p
0	0	12	24	28	3
1	0	10	18	16	2
0	1	9	16	10	2
2	0	8	12	8	1
1	1	7	10	4	1
0	2	6	8	1	1
3	0	6	6	4	0
2	1	5	4	2	0
1	2	4	2	1	0
0	3	3	0	1	0

Chacune des deux dernières courbes de ce Tableau se correspond dualistiquement à elle-même. Ainsi que l'expérience l'a appris, les courbes du troisième et du quatrième ordre ici énumérées ont toutes une existence effective.

Nous nous sommes borné jusqu'ici à la considération d'un point double individuel, etc. Mais les formules établies ont une portée

générale, car on peut toujours remplacer les points multiples d'ordre élevé, en tant qu'il s'agit de leur influence sur la classe de la courbe et sur le nombre des points d'inflexion, par un certain nombre de singularités moins élevées. Cela est en premier lieu évident pour un point multiple d'ordre r formé de branches à cours séparé, car dans un tel point chaque première polaire a un point d'ordre de multiplicité $r-1$ dont les branches ne sont pas tangentes à celles de la courbe originaire, et, par suite, $r(r-1)$ des tangentes issues du pôle se confondent avec la droite qui joint le pôle au point multiple. C'est ce nombre qui mesure l'abaissement de la classe, c'est-à-dire que nous devons poser $d=\frac{r(r-1)}{2}$. *Le point multiple d'ordre r est donc équivalent à $\frac{r(r-1)}{2}$ points doubles*, comme nous l'avons précédemment montré d'une autre manière (p. 34).

La même chose a lieu pour le nombre des points d'inflexion, car on peut démontrer que la hessienne a aussi au point multiple d'ordre r un point de même multiplicité et qu'elle touche à la fois toutes les branches de la courbe originaire.

On aura aussi à résoudre d'une manière semblable les singularités plus compliquées; on placera dans ce but le point dont il s'agit en l'un des sommets du triangle des coordonnées, et on lui appliquera ensuite la règle de Cramer (p. 34 et suiv.). Il est néanmoins à remarquer qu'une singularité peut tirer son origine de la présence de tangentes multiples en un point multiple, ce qui en rend l'examen difficile. Cayley a, pour l'étude des cas de cette nature, donné des règles [1] d'après lesquelles on parvient, au moyen de développements en série, à déterminer l'influence de la singularité sur la classe; toutefois, une exposition complète du sujet manque jusqu'à présent.

Les démonstrations des formules de Plücker reposent essentiellement sur les propriétés des polaires et de la hessienne dans les points doubles ou cuspidaux de la courbe originaire. Nous avons

---

(1) CAYLEY, *On the higher singularities of plane curves* (*Quarterly Journal*, t. VII), et *Note sur les singularités des courbes planes* (*Crelle's Journal*, t. 64, p. 369). *Voir aussi* Halphen (*Comptes rendus*, t. LXXVIII et LXXX; *Journal de Liouville*, 3e série, t. II), et, au surplus, la fin de ce Chapitre.

démontré occasionnellement les propositions dont il s'agit et fait usage, pour les démonstrations, d'une situation particulière du triangle des coordonnées. Les méthodes symboliques fournissent un moyen d'obtenir directement ces propositions auxiliaires, sans déplacement de coordonnées, leur caractère projectif étant ainsi mis en évidence, et nous abordons d'autant plus volontiers cet objet, que nous y trouverons un exemple très-convenable de calculs symboliques.

Soit

$$(1) \qquad 0 = a_x^n = b_x^n = c_x^n = \ldots$$

l'équation de la courbe originaire, et y un point double de cette courbe, en sorte que

$$(2) \qquad a_y^{n-1} a_1 = 0, \quad a_y^{n-1} a_2 = 0, \quad a_y^{n-1} a_3 = 0.$$

Ces équations expriment immédiatement que la première polaire d'un point *quelconque* passè par le point double. La $(n-2)^{\text{ième}}$ polaire du point double lui-même

$$(3) \qquad a_y^{n-2} a_x^2 = 0$$

représente le produit des deux tangentes en y. En coordonnées lignes, elle donne donc l'équation de leur point de rencontre compté deux fois (t. I, p. 129), c'est-à-dire que nous pouvons poser

$$(4) \qquad (abu)^2 a_y^{n-2} b_y^{n-2} = \rho u_y^2.$$

Cette expression s'annule, en vertu de (2), si l'on pose

$$u_i u_k = c_i c_k c_y^{n-3} c_x,$$

et cela indépendamment des valeurs des quantités x_i. Nous avons donc les trois équations

$$(5) \qquad \rho c_y^{n-1} c_i = (abc)^2 a_y^{n-2} b_y^{n-2} c_y^{n-3} c_i = 0,$$

lesquelles expriment que *la hessienne a en y un point double.*

Le couple de tangentes de la hessienne au point double est donné par

$$(n-3)(abc)^2 a_y^{n-2} b_y^{n-2} c_y^{n-4} c_x^2 + 2(n-2)(abc)^2 a_y^{n-2} b_y^{n-3} c_y^{n-3} b_x c_x = 0.$$

Le premier terme du premier membre (à part le facteur $n-3$)

est ce que devient le premier membre de l'équation (4) si l'on y pose

$$u_i u_k = c_i c_k c_y^{n-4} c_x^2.$$

Mais, par cette substitution, il vient dans le second membre de (4)

$$u_y^2 = c_y^{n-2} c_x^2,$$

et, par conséquent, le premier terme de notre expression, égalé à zéro, donne le couple de tangentes de la courbe originaire; nous montrerons qu'il en est de même à l'égard du second terme, c'est-à-dire à l'égard de

$$U = (abc)^2 a_y^{n-2} b_y^{n-3} c_y^{n-3} b_x c_x.$$

Si l'on multiplie ce terme par u_y, les u_i étant des grandeurs complétement arbitraires, on a identiquement (d'après III, t. I, p. 352)

$$U u_y = a_y^{n-2} b_y^{n-3} c_y^{n-3} b_x c_x (abc) [(bcu) a_y - (acu) b_y + (abu) c_y].$$

Ici le premier terme est nul, à cause de (2); les deux autres sont identiques, parce que l'un s'obtient au moyen de l'autre, par permutation de b et c; par conséquent, on a

$$\begin{aligned} U u_y &= 2 a_y^{n-2} b_y^{n-3} c_y^{n-2} b_x c_x (abc)(abu) \\ &= a_y^{n-2} b_y^{n-3} c_y^{n-2} b_x (abc) [(abu) c_x + (bcu) a_x], \end{aligned}$$

ou, d'après l'identité (III) (t. I, p. 352),

$$U u_y = a_y^{n-2} b_y^{n-3} c_y^{n-2} b_x (abc) [(acu) b_x + (abc) u_x].$$

Le second terme est nul, d'après (5), et le premier a, d'après (4), la valeur

$$U u_y = - \rho b_y^{n-2} b_x^2 u_y,$$

car il provient, à part le signe, de

$$(abu)(abv) a_y^{n-2} b_y^{n-2} \doteq (acu)(acv) a_y^{n-2} c_y^{n-2} = \rho u_y v_y,$$

si l'on pose $v_i = b_y^{n-3} b_x^2 b_i$. Par là se trouve démontrée notre proposition, à savoir que *la hessienne touche les deux branches de la*

courbe originaire au point double. Le fait que la tangente d'une première polaire quelconque est harmonique au couple des tangentes du point double et à la ligne qui joint ce dernier point au pôle (z) (p. 24) résulte de ce que la tangente en question

$$(6)\qquad a_y^{n-2} a_z a_x = 0,$$

par suite de la forme de son équation, se confond avec la polaire du point z relativement au couple de lignes $a_y^{n-2} a_x^2 = 0$.

Si la courbe originaire a un rebroussement au point y, la polaire quadratique de y est le carré parfait d'une expression linéaire, c'est-à-dire que l'on a

$$(7)\qquad a_y^{n-2} a_x^2 = v_x^2,$$

les quantités v_i désignant les coordonnées de la tangente de rebroussement. L'équation de la tangente en y à la première polaire d'un point z (équation 6) est alors identique à

$$v_x v_z = 0.$$

Par conséquent, *la première polaire d'un point quelconque touche la tangente de rebroussement au point de rebroussement*; mais, en ce dernier point, la $(n-3)^{\text{ième}}$ polaire de y

$$a_y^{n-3} a_x^3 = 0$$

a aussi un point de rebroussement et une tangente de rebroussement commune avec la courbe donnée. Donc, d'après un théorème récemment démontré, la polaire d'un point relativement à cette courbe du troisième ordre

$$a_y^{n-3} a_z a_x^2 = 0$$

touche la tangente de rebroussement au point de rebroussement. Par conséquent, l'équation de cette conique en coordonnées-lignes

$$a_y^{n-3} b_y^{n-3} (abu)^2 a_z b_z = 0$$

est satisfaite si l'on pose

$$u_i u_k = v_i v_k = c_y^{n-2} c_i c_k,$$

et cela indépendamment des z_i. L'équation

(8) $$(abc)^2 a_y^{n-3} b_y^{n-3} c_y^{n-2} a_z b_z = 0 \quad (^1)$$

est donc satisfaite identiquement ; mais elle n'est autre que l'équation de la polaire quadratique de y relativement à la hessienne, car le terme qui se rencontre encore dans cette dernière,

$$a_y^{n-4} b_y^{n-2} c_y^{n-2} (abc)^2 a_z^2,$$

résulte de l'expression $(bcu)^2 b_y^{n-2} c_y^{n-2}$, qui s'évanouit, en vertu de (7), pour $u_i u_k = a_i a_k a_y^{n-4} a_z^2$, et il est, par conséquent, identiquement nul. Donc il résulte de (8) que *la hessienne a un point triple au point de rebroussement de la courbe primitive.*

Nous obtiendrons facilement la détermination des trois tangentes à ce point triple après avoir considéré les relations correspondantes dans les courbes du troisième ordre. Si une telle courbe possède un point de rebroussement, y ayant pour tangente de rebroussement v, et que ξ soit un point de cette dernière, l'équation (7) se transforme en

$$a_y a_x^2 = v_x^2 = (xy\xi)^2.$$

Soit maintenant

$$\Delta = (abc)^2 a_x b_x c_x;$$

il vient, les u_i désignant des grandeurs arbitraires,

$$\begin{aligned}\Delta u_y &= (abc)\, a_x b_x c_x \left[(abu) c_y - (acu) b_y + (bcu) a_y\right] \\ &= 3\,(abc)(abu)\, a_x b_x c_x c_y = 3\,(abv)(abu)\, a_x b_x v_x \\ &= 3\,(a_y b_\xi - b_y a_\xi)(abu)\, a_x b_x v_x \\ &= 6\, a_y b_\xi (abu)\, a_x b_x v_x = 6\,(vbu)\, b_x b_\xi v_x^2.\end{aligned}$$

Comme nous pouvons supposer que les u_i aient été choisis de

---

(1) L'évanouissement de cette expression, que nous désignerons par P, peut aussi être reconnu de la manière suivante. Soit ξ un point de la tangente de rebroussement ($v_\xi = 0$); on a, d'après (7),

$$a_y^{n-2} a_x^2 = (x\xi y)^2,$$

et ensuite

$$a_y^{n-2} a_x a_\xi = v_x v_\xi = 0, \quad a_y^{n-1} a_x = 0.$$

De là résulte qu'on a identiquement

$$P = (a_\xi b_y - b_\xi a_y)^2 a_y^{n-3} b_y^{n-3} a_z b_z = a_y^{n-3} b_y^{n-3} a_z b_z (a_y^2 b_\xi^2 - 2 a_\xi b_\xi a_y b_y + b_y^2 a_\xi^2) = 0.$$

telle manière que le facteur $(vbu)b_x b_\xi$ ne soit pas identiquement nul, il s'ensuit que *la hessienne d'une courbe du troisième ordre à point de rebroussement se compose de trois lignes droites, dont deux se confondent avec la tangente de rebroussement* (p. 30).

Si l'on passe aux courbes d'ordre n, les trois tangentes de la hessienne seront représentées par la polaire cubique de y relativement à cette dernière, c'est-à-dire par l'équation

$$(9)\qquad \left\{ \begin{aligned} &(n-2)\, a_y^{n-3} b_y^{n-3} c_y^{n-3} (abc)^2 a_x b_x c_x \\ &\quad + 2(n-3)\, a_y^{n-4} b_y^{n-3} c_y^{n-2} (abc)^2 a_x^2 b_x = 0, \end{aligned} \right.$$

car le terme

$$(abc)^2 a_y^{n-3} b_y^{n-2} c_y^{n-2} a_x^3$$

s'évanouit identiquement, en vertu de (7). Examinons maintenant isolément les deux termes de l'équation (9). Le premier, égalé séparément à zéro, donne la hessienne de la courbe du troisième ordre

$$a_y^{n-3} a_x^3 = 0,$$

qui possède aussi en y un point de rebroussement ayant v pour tangente; il renferme donc, d'après un théorème récemment démontré, le facteur v_x^2. La même chose a aussi lieu pour le second terme du premier membre de (9). Si l'on désigne en effet par Q ce terme, abstraction faite du facteur $2(n-3)$, on a, d'après (7),

$$Q = a_y^{n-4} b_y^{n-3} c_y^{n-2} (abc)^2 a_x^2 b_x = a_y^{n-4} b_y^{n-3} (abv)^2 a_x^2 b_x.$$

Soit maintenant encore ξ un point de la tangente de rebroussement, d'où $v_\xi = 0$; il viendra

$$\begin{aligned} Q &= a_y^{n-4} b_y^{n-3} (a_y b_\xi - b_y a_\xi)^2 a_x^2 b_x \\ &= a_y^{n-2} a_x^2 b_y^{n-3} b_\xi^2 b_x + a_y^{n-4} a_x^2 a_\xi^2 b_y^{n-1} b_x \\ &\quad - 2 a_y^{n-3} a_x^2 a_\xi b_y^{n-2} b_x b_\xi, \end{aligned}$$

ou, en vertu de (2) et de (7),

$$Q = v_x^2 b_y^{n-3} b_\xi^2 b_x - 2 v_x v_\xi a_y^{n-3} a_x^2 a_\xi,$$

et enfin, à cause de $v_\xi = 0$,

$$Q = v_x^2 b_y^{n-3} b_\xi^2 b_x.$$

L'expression (9) renferme donc effectivement le facteur v_x^2, et nous avons par suite ce théorème : *Si une courbe possède un point de rebroussement, sa hessienne a en ce point un point triple tel que deux de ses tangentes coïncident avec la tangente de rebroussement de la courbe donnée.*

Dans la transformation que nous avons opérée sur Q se trouve renfermé un théorème géométrique. En effet,

$$Q \equiv a_y^{n-4} b_y^{n-3} (abv)^2 a_x^2 b_x = 0$$

est l'équation de la première polaire de y relativement à la courbe

$$(10) \qquad a_y^{n-4} b_y^{n-4} (abv)^2 a_x^2 b_x^2 = 0.$$

Cette dernière a donc, de même que Q, un point triple en y. Mais dans (10) nous avons en même temps l'équation de la conique

$$a_y^{n-4} a_x^2 a_z^2 = 0$$

en coordonnées lignes, c'est-à-dire de la polaire quadratique de x relativement à la courbe

$$(11) \qquad a_y^{n-4} a_z^4 = 0,$$

courbe du quatrième ordre ayant un point de rebroussement en y.

L'équation (10) donne, par suite, le lieu des points x dont les polaires quadratiques relativement à (11) touchent une ligne ayant v_i pour coordonnées. *Si donc une courbe du quatrième ordre a un point de rebroussement, les points dont les secondes polaires touchent la tangente de rebroussement sont situés sur une autre courbe du quatrième ordre. Cette dernière a au point de rebroussement un point triple, dont deux tangentes coïncident avec la tangente de rebroussement de la courbe donnée.*

IV. — Sur quelques courbes covariantes.

Il a déjà été observé précédemment (p. 16) que l'on peut écrire immédiatement sous forme symbolique un nombre illimité de covariants, dont la signification doit être précisément déduite de la théorie des polaires. Parmi ces covariants toutefois, un petit

nombre a été étudié jusqu'ici, à savoir ceux qui sont définis par les conditions géométriques les plus simples, et l'examen des courbes correspondantes va nous occuper maintenant. Nous apprendrons à connaître un premier exemple d'une relation *univoque non linéaire entre deux courbes*; l'importance exceptionnelle de ces relations, qui n'apparaîtra que plus tard, justifiera le long temps que nous consacrerons au sujet. Nous aurons d'ailleurs occasion de faire, à diverses reprises, usage des formules de Plücker qui viennent d'être développées.

L'espèce citée de covariants étant caractérisée d'une manière générale par la condition que la $r^{\text{ième}}$ polaire d'un point ait une propriété invariante déterminée, établissons en particulier la condition à remplir pour que la première polaire d'un point y relativement à la courbe originaire

$$f = a_x^n = b_x^n = \ldots = 0$$

possède un point double. Nous avons obtenu (p. 19), ainsi qu'on s'en souvient, comme lieu de ces points doubles, la hessienne qui est de l'ordre $3(n-2)$ en éliminant les y_i (coordonnées du pôle) entre les trois équations $\left(f_{ik} = \frac{1}{n(n-1)} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\right)$

$$(1) \quad \begin{cases} a_x^{n-2} a_y a_1 = \Sigma f_{1k} y_k = 0, \\ a_x^{n-2} a_y a_2 = \Sigma f_{2k} y_k = 0, \\ a_x^{n-2} a_y a_3 = \Sigma f_{3k} y_k = 0. \end{cases}$$

Une seconde courbe sera parcourue par le pôle y : on l'appelle la *steinérienne de la courbe originaire*. Une troisième sera enveloppée par les lignes qui joignent un pôle y (point de la steinérienne) avec le point double de sa première polaire (point de la hessienne); ce sera la *cayleyenne de la courbe primitive* (1). Une quatrième

(1) Étudiée d'abord par Cayley pour les courbes du troisième ordre [*A memoir on curves of the third order* (*Philosophical Transactions*, t. CXLVII, IIe Partie, 1857), ses singularités ont été données sans démonstration par Steiner dans le *Journal de Crelle*, t. 47. Cremona a déduit du raisonnement les nombres plückériens de la steinérienne (*Einleitung in die Theorie der algebraischen Curven*, *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*). Les démonstrations analytiques qui suivent ont été données par Clebsch, *Ueber einige von Steiner behandelte Curven* (*Journal de Crelle*, t. 64). Steiner appelle la courbe qui, plus tard, a reçu son nom, *courbe-noyau* (*Kerncurve*).

courbe est enfin enveloppée par les tangentes des premières polaires en leurs points doubles [1]. Nous bornerons néanmoins nos considérations aux trois premières courbes citées. Nous supposerons d'ailleurs que tous les coefficients de la courbe primitive sont indépendants les uns des autres.

La hessienne est donnée par l'équation

$$\Delta = (abc)^2\, a_x^{n-2}\, b_x^{n-2}\, c_x^{n-2} = 0.$$

Elle ne possède en général, c'est-à-dire si l'on exclut les relations spéciales entre les coefficients de la courbe primitive, aucun point double. On peut démontrer indirectement cette proposition en déterminant directement le genre de la steinérienne, comme nous le ferons plus tard, et en observant alors que la hessienne et la steinérienne se correspondent point par point, de telle sorte qu'à un point de l'une répond sans ambiguïté un point déterminé de l'autre, et réciproquement. A l'aide du théorème (que nous démontrerons plus tard occasionnellement à propos des transformations univoques) d'après lequel deux courbes qui présentent entre elles une relation réciproque à détermination unique sont du même genre, on trouve que le genre de la hessienne est égal à celui de la steinérienne, c'est-à-dire égal à $\frac{1}{2}(3n-7)(3n-8)$, d'où il suit que la première courbe n'a pas de point multiple. La démonstration directe paraît présenter de graves difficultés et n'a pas encore été fournie. Dans tous les cas, il est digne de remarque que la hessienne puisse avoir un point double sans que la courbe primitive possède un point de cette nature, comme le montre l'exemple d'une courbe spéciale du troisième ordre (à savoir la courbe $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$).

En admettant provisoirement le théorème énoncé, on obtient par les formules de Plücker, pour les singularités de la hessienne (que nous désignerons par des lettres accentuées), les nombres

---

[1] Des recherches plus générales de Zeuthen sur les systèmes d'un nombre simplement infini de courbes, recherches que nous mentionnerons plus tard, il résulte, pour le genre p de cette courbe,

$$2p = 2.3(n-2) + 12(n-2)(n-3) = 6(n-2)(2n-5).$$

Voir la dernière Section de ce Chapitre.

suivants :

$$n' = 3(n-2), \quad d' = 0, \quad r' = 0,$$
$$k' = n'(n'-1) \quad = 3(n-2)(3n-7),$$
$$w' = 3n'(n'-2) = 9(n-2)(3n-8),$$
$$t' = \frac{1}{2}n'(n'-2)(n'^2-9) = \frac{27}{2}(n-1)(n-2)(n-3)(3n-8),$$
$$p' = \frac{1}{2}(n'-1)(n'-2) \quad = \frac{1}{2}(3n-7)(3n-8).$$

L'équation de la steinérienne s'obtiendra en éliminant les x entre les équations (1). Conformément à la proposition suivant laquelle le degré du résultant par rapport aux coefficients de chaque équation est égal au produit des ordres auxquels entrent les variables dans les deux autres équations (p. 13) [ici, par conséquent, égal à $(n-1)^2$], elle est du degré $3(n-2)^2$ par rapport aux y ; autrement dit, *l'ordre de la steinérienne est égal à* $3(n-2)^2$.

Pour déterminer sa classe, remarquons que les coordonnées u_i d'une de ses tangentes se trouvent au moyen des formules

$$(2) \qquad \begin{cases} u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 = 0, \\ u_1 dy_1 + u_2 dy_2 + u_3 dy_3 = 0, \end{cases}$$

car la tangente est la ligne qui joint deux points voisins de la courbe ayant pour coordonnées y_i et $y_i + dy_i$. Le point $y + dy$ doit satisfaire, tout comme y, aux équations (1), si dans ces équations on écrit $x_i + dx_i$ à la place de x_i. Nous avons donc encore les trois équations

$$(3) \qquad \begin{cases} f_{11}dy_1 + f_{12}dy_2 + f_{13}dy_3 + y_1 df_{11} + y_2 df_{12} + y_3 df_{13} = 0, \\ f_{21}dy_1 + f_{22}dy_2 + f_{23}dy_3 + y_1 df_{21} + y_2 df_{22} + y_3 df_{23} = 0, \\ f_{31}dy_1 + f_{32}dy_2 + f_{33}dy_3 + y_1 df_{31} + y_2 df_{32} + y_3 df_{33} = 0. \end{cases}$$

Multipliant maintenant les équations (1), une fois par x_1, x_2, x_3, une autre fois par dx_1, dx_2, dx_3, et ajoutant chaque fois, il vient

$$(4) \qquad \begin{cases} f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 = 0, \\ y_1 df_1 + y_2 df_2 + y_3 df_3 = 0. \end{cases}$$

D'ailleurs, les équations (3) multipliées par x_1, x_2, x_3 et ajoutées

donnent, en ayant égard à (4), le résultat suivant :

(5) $$f_1 dy_1 + f_2 dy_2 + f_3 dy_3 = 0.$$

Si l'on compare ces équations avec les équations (2), on trouve

(6) $$\mu u_1 = f_1, \quad \mu u_2 = f_2, \quad \mu u_3 = f_3,$$

d'où il résulte qu'à tout point de la hessienne correspond une tangente de la steinérienne. Éliminons les x entre ces équations et entre l'équation

$$\Delta = 0;$$

il en résultera une équation entre les quantités u qui sera l'équation de la steinérienne en coordonnées lignes. Sa classe est déterminée par le nombre des tangentes qui passent par un point quelconque x, c'est-à-dire qui satisfont à l'équation

$$u_\xi = 0 \quad \text{ou} \quad f_1 \xi_1 + f_2 \xi_2 + f_3 \xi_3 = 0.$$

Or cette équation représente une courbe du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre qui, ensemble avec la hessienne, détermine les $3(n-2)(n-1)$ points tels que les tangentes à la steinérienne qui leur correspondent passent par le point ξ. Le nombre de ces tangentes est ainsi déterminé : *la steinérienne est de la classe* $3(n-1)(n-2)$.

Nous passons maintenant d'abord à la détermination de l'ordre et de la classe de la cayleyenne. Un point de cette courbe est défini comme l'intersection de deux tangentes voisines : donc, pour trouver son ordre nous devons nous demander combien de fois il arrive que deux tangentes infiniment voisines se coupent sur une droite quelconque v. Soient z_i les coordonnées d'un point de la courbe; la tangente en ce point est la ligne de jonction d'un pôle y avec le point double x de sa première polaire, et par conséquent la tangente voisine la ligne de jonction des deux points $x + dx$, $y + dy$, si x et $x + dx$ sont des points voisins de la hessienne. Nous avons par suite

(7) $$z_i = \mu x_i + \lambda y_i,$$

et aussi

$$z_i = (\mu + d\mu)(x_i + dx_i) + (\lambda + d\lambda)(y_i + dy_i),$$

et de là résulte

(8) $$x_i d\mu + \mu dx_i + y_i d\lambda + \lambda dy_i = 0.$$

Si de plus z doit être situé sur une droite déterminée ν ($\nu_z = 0$), on a, d'après (7),

$$\mu\nu_x + \lambda\nu_y = 0.$$

On peut donc poser

$$\lambda = \rho\nu_x, \quad \mu = -\rho\nu_y,$$

et par là (8) devient

(9) $$x_i d\mu + y_i d\lambda + \rho(\nu_x dy_i - \nu_y dx_i) = 0.$$

Si nous portons les valeurs des dy_i de ces équations dans les équations (3) qui ont encore lieu ici, nous trouvons, en ayant égard à (1),

(10) $$\rho\nu_x(y_1 df_{i1} + y_2 df_{i2} + y_3 df_{i3}) + \rho\nu_y \Sigma f_{ik} dx_k - f_i d\mu = 0.$$

Par une transformation convenable de ces équations nous pouvons en éliminer les différentielles des x_i, et nous obtenons ainsi une équation qui doit exister entre deux points correspondants x et y de la hessienne et de la steinérienne pour que le point où leur ligne de jonction touche la cayleyenne soit situé sur la droite ν. Si nous désignons en effet par f_{ikh} les troisièmes dérivées partielles de f, d'où

$$f_{ikh} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_k \partial x_h} = a_x^{n-3} a_i a_k a_h,$$

$$y_1 df_{i1} + y_2 df_{i2} + y_3 df_{i3} = (n-2)\Sigma\Sigma f_{ikh} y_k dx_h,$$

et que nous posions ensuite pour abréger

$$\varphi_{ik} = (n-2)(y_1 f_{i1k} + y_2 f_{i2k} + y_3 f_{i3k}),$$

l'expression qui figure dans le premier membre se transforme en

$$y_1 df_{i1} + y_2 df_{i2} + y_3 df_{i3} = \varphi_{i1} dx_1 + \varphi_{i2} dx_2 + \varphi_{i3} dx_3.$$

En substituant dans l'équation (10), on obtient

$$\rho\nu_x \Sigma \varphi_{ik} dx_k + \Sigma(\rho\nu_y dx_k - x_k d\mu) f_{ik} = 0.$$

Multiplions maintenant ces équations par ν_y et ajoutons les termes

$-\nu_x d\mu \Sigma \varphi_{ik} x_k$. Cette dernière opération est sans influence, car nous avons, d'après le théorème d'Euler et d'après (1),

$$\varphi_{i1} x_1 + \varphi_{i2} x_2 + \varphi_{i3} x_3 = (n-2)(f_{i1} y_1 + f_{i2} y_2 + f_{i3} y_3) = 0.$$

Nos équations deviennent enfin par là

$$\nu_y \Sigma p_k f_{ik} + \nu_x \Sigma p_k \varphi_{ik} = 0,$$

relation dans laquelle on a posé $p_k = \rho \nu_y dx_k - x_k d\mu$, et l'élimination des p_k et conséquemment aussi celle des dx_k donnent pour résultat

$$(11) \qquad \begin{vmatrix} \nu_y f_{11} + \nu_x \varphi_{11} & \nu_y f_{21} + \nu_x \varphi_{21} & \nu_y f_{31} + \nu_x \varphi_{31} \\ \nu_y f_{12} + \nu_x \varphi_{12} & \nu_y f_{22} + \nu_x \varphi_{22} & \nu_y f_{32} + \nu_x \varphi_{32} \\ \nu_y f_{13} + \nu_x \varphi_{13} & \nu_y f_{23} + \nu_x \varphi_{23} & \nu_y f_{33} + \nu_x \varphi_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant est homogène et du troisième degré en ν_x et ν_y ; il est, par conséquent, de la forme

$$\nu_x^3 P + \nu_x^2 \nu_y Q + \nu_x \nu_y^2 R + \nu_y^3 S.$$

Mais ici S est le déterminant formé avec les f_{ik} ; il est donc nul à cause de $\Delta = 0$; d'ailleurs P désigne le déterminant des φ_{ik}, et ce déterminant est encore nul en vertu de

$$\varphi_{i1} x_1 + \varphi_{i2} x_2 + \varphi_{i3} x_3 = 0.$$

L'expression (11) est donc encore divisible par $\nu_x \nu_y$, et, après suppression de ce facteur, il reste une équation de la forme

$$\Sigma\Sigma A_{ik} y_i y_k = 0,$$

dans laquelle les A_{ik} désignent des fonctions de l'ordre $3n-7$ par rapport aux x. D'autre part, les produits $y_i y_k$ deviennent, par suite de (1), proportionnels aux déterminants mineurs F_{ik} de Δ [1] ; on peut donc finalement remplacer (11) par l'équation

$$\Sigma\Sigma A_{ik} F_{ik} = 0,$$

qui ne dépend plus que des x. Elle représente, puisque les F_{ik}

---

[1] On tire, en effet, de (1), d'après des propositions de la théorie des coniques,

$$(abu)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} = \rho u_y^2.$$

renferment les x à la $(2n-4)^{\text{ième}}$ dimension, une courbe de l'ordre $3n-7+2n-4=5n-11$ qui coupe la hessienne aux points x, dont les lignes de jonction avec les pôles correspondants y touchent la cayleyenne en ses points d'intersection avec la ligne v; en d'autres termes, *l'ordre de la cayleyenne est égal à* $3(n-2)(5n-11)$.

La détermination de la classe s'effectue plus simplement. Si la tangente définie comme ligne de jonction de deux points correspondants x et y doit passer par un point déterminé ξ, on doit avoir

$$y_i = \mu x_i + \lambda \xi_i,$$

ce qui, porté dans les équations (1), donne

$$(12) \qquad \mu f_i + \lambda \varphi_i = 0,$$

si

$$\varphi_i = f_{i1}\xi_1 + f_{i2}\xi_2 + f_{i3}\xi_3.$$

On trouve, par suite, les valeurs correspondantes des x au moyen des équations

$$(13) \qquad \begin{cases} f_2\varphi_3 - \varphi_2 f_3 = 0, \\ f_3\varphi_1 - \varphi_3 f_1 = 0, \\ f_1\varphi_2 - \varphi_1 f_2 = 0. \end{cases}$$

Le nombre des solutions communes aux deux premières équations est égal à $(2n-3)^2$; mais il en faut exclure les $(n-1)(n-2)$ solutions des équations $f_3 = 0$, $\varphi_3 = 0$, pour lesquelles les deux premières équations sont satisfaites, mais non la dernière; nous avons ensuite à retrancher la solution $x_i = \xi_i$, évidemment illusoire. Il reste donc seulement

$$(2n-3)^2 - (n-1)(n-2) - 1 = 3(n-1)(n-2)$$

points communs aux courbes (13). A chacun d'eux correspond une tangente de la cayleyenne passant par le point ξ; *la classe de la cayleyenne est, en conséquence, égale à* $3(n-1)(n-2)$.

La détermination des autres nombres caractéristiques appartenant à la courbe de Steiner, et en particulier celle du nombre de ses tangentes d'inflexion, peut être rattachée aux équations (6), en vertu desquelles une tangente u de la steinérienne est liée à

un point x de la hessienne par les relations

$$\mu u_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

De là, en effet, résulte cette première conséquence que *la steinérienne est enveloppée par les polaires linéaires des points de la hessienne, et que le point de contact de l'une de ces droites est toujours le point y de la steinérienne correspondant au pôle x de la hessienne.* Ce dernier résultat vient de ce que, en vertu de (1), ont toujours lieu pour y les équations (4)

$$f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 = 0,$$
$$y_1 df_1 + y_2 df_2 + y_3 df_3 = 0,$$

et que, par suite, y est constamment le point d'intersection de deux tangentes successives u et $u + du$. On peut maintenant se demander, en général, quels sont l'ordre et la classe d'une courbe $\Phi = 0$ qui serait enveloppée par les polaires linéaires des points d'une courbe du $m^{\text{ième}}$ ordre

(14) $$\varphi = 0,$$

relativement à la courbe originaire $f = 0$ (d'ordre n), ce qui introduit dans les recherches précédentes une courbe du $m^{\text{ième}}$ ordre à la place de la hessienne. La classe est déterminée par le nombre des tangentes qui passent par un point fixe ξ, et conséquemment par le nombre des points d'intersection de la courbe d'ordre $n-1$

(15) $$\frac{\partial f}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\xi_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\xi_3 = 0,$$

avec $\varphi = 0$, et elle est, par suite, égale à $m(n-1)$. Pour la détermination de l'ordre, nous devons choisir le point ξ sur une droite quelconque v de telle manière que deux tangentes passant par ce point, et par conséquent deux points d'intersection des courbes (14) et (15), soient infiniment rapprochées; à chacun de ces points d'intersection correspond d'ailleurs une des tangentes en question. De là il résulte premièrement que :

Les premières polaires des points d'une courbe enveloppée par les polaires linéaires d'une autre courbe φ sont tangentes à cette dernière.

Pour atteindre notre but, nous avons, d'après cela, à établir la condition du contact des courbes (14) et (15) ou au moins le degré de cette condition par rapport aux coefficients de (15), et conséquemment par rapport aux ξ. Nous élargirons ce problème en nous proposant *de déterminer, en général, le degré du tactinvariant (c'est-à-dire de la condition de contact) de deux courbes d'ordre m et μ par rapport aux coefficients de leurs équations.* Soient $\varphi = 0$, $\psi = 0$ respectivement ces deux courbes, qui se touchent au point x; si v désigne une droite quelconque et ξ son point d'intersection avec la tangente commune de φ et ψ en x, les équations suivantes sont nécessairement satisfaites :

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\xi_2 + \frac{\partial\psi}{\partial x_3}\xi_3 = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\xi_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\xi_3 = 0,$$

$$v_1\xi_1 + v_2\xi_2 + v_3\xi_3 = 0.$$

Éliminant les ξ_i, il vient

$$(16) \qquad V \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\psi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi}{\partial x_2} & \dfrac{\partial\psi}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0,$$

équation de l'ordre $m + \mu - 2$ qui, en général, représente le lieu des points dont les polaires linéaires se coupent sur la ligne v; cette courbe passe donc, indépendamment des v, par le point de contact. Si nous prenons, au contraire, les x constants, les v variables, la formule (16) donne l'équation du point d'intersection des deux polaires linéaires de x; mais ce point d'intersection se confond avec le pôle x si ce dernier est un point commun de $\varphi = 0$ et de $\psi = 0$. L'élimination des x entre $\varphi = 0$, $\psi = 0$ et entre (16) donne, par suite, le produit des points d'intersection de φ et ψ. Toutefois ce produit est encore multiplié par un facteur étranger, car l'équation serait ici du degré $m\mu$ par rapport aux coefficients de V, du degré $\mu(m + \mu - 2)$ par rapport à ceux de φ et du degré $m(m + \mu - 2)$ par rapport à ceux de ψ, par conséquent en tout des degrés $\mu(2m + \mu - 2)$ et $m(2\mu + m - 2)$ par

rapport aux coefficients de φ et de ψ, tandis que ces nombres, d'après des recherches précédentes (t. I, p. 350), ne peuvent être respectivement égaux qu'à μ et m. Le facteur intervenant est donc des degrés $\mu(2m+\mu-3)$ et $m(2\mu+m-3)$ par rapport aux coefficients de φ et ψ respectivement. Or, comme l'expression (16) et par suite aussi notre résultant s'évanouissent indépendamment des ν, si x est un point de contact de φ et ψ, le facteur cité, égalé à zéro, donne précisément la condition du contact, et nous avons ce théorème :

La condition de contact (tactinvariant) de deux courbes des ordres m et μ est du degré $\mu(2m+\mu-3)$ par rapport aux coefficients de la première et du degré $m(2\mu+m-3)$ par rapport aux coefficients de la seconde (¹).

Dans notre cas, nous avons une courbe du $m^{\text{ième}}$ ordre (14) et une courbe du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre (15); leur tactinvariant est donc, par rapport aux coefficients de la dernière et par conséquent relativement aux ξ (ce dont il s'agit uniquement pour nous ici), du degré $m(2n+m-5)$. Mais l'invariant, égalé à zéro, donne immédiatement le lieu des points ξ dont les premières polaires touchent la courbe φ, c'est-à-dire la courbe $\Phi=0$ en coordonnées points. Donc *l'ordre de la courbe enveloppée par les polaires linéaires des points* de $\varphi=0$ *est égal à* $m(2n+m-5)$.

En remplaçant maintenant de nouveau $\varphi=0$ par la hessienne et par suite m par $3(n-2)$, nous trouverions l'ordre de la steinérienne égal à $3(n-2)(5n-11)$, tandis qu'en réalité il est seulement égal à $3(n-2)^2$. Cela provient de ce que, parmi les tangentes qu'il s'agit de mener de ξ à $\Phi=0$, il y en a deux successives qui coïncident aussi pour tout point d'une tangente d'inflexion de Φ (²). Donc, dans la steinérienne se présentent des tangentes d'inflexion (ce qui, en général, n'aurait pas lieu pour une courbe donnée en coordonnées lignes), d'où la conséquence suivante :

Le lieu des points dont les premières polaires touchent la hes-

---

(¹) *Voir* SALMON, *Higher plane curves*, Chap. III. Comme exemple, citons le tactinvariant de deux coniques, t. I, p. 371.

(²) Pour un point appartenant à une tangente double, il y a aussi deux de ces tangentes qui coïncident, mais elles ne sont pas consécutives.

sienne se décompose en deux parties : la courbe de Steiner, qui est d'ordre $3(n-2)^2$, *et une autre courbe d'ordre*

$$3(n-2)(5n-11)-3(n-2)^2=3(n-2)(4n-9),$$

qui est le produit des tangentes d'inflexion de la steinérienne.

Pour les premières polaires des points de ces tangentes d'inflexion le contact est un contact proprement dit; au contraire, pour celles des points de la steinérienne, le contact est improprement dit, ces dernières polaires ayant un point double sur la hessienne. Le théorème énoncé en dernier lieu nous donne le nombre des tangentes d'inflexion de la courbe de Steiner, c'est-à-dire

$$3(n-2)(4n-9),$$

et nous pouvons, par suite, calculer les singularités restantes au moyen des formules de Plücker. On obtient en particulier pour le genre p de la courbe de Steiner la relation

$$2p-2=3(n-2)^2+3(n-2)(4n-9)-2.3(n-1)(n-2),$$

d'où

$$p=\frac{1}{2}(3n-7)(3n-8).$$

Le genre de la hessienne se trouve ainsi également connu, si l'on fait usage du théorème mentionné plus haut sur les courbes qui sont liées réciproquement entre elles par une relation à détermination unique. La relation à détermination unique dont il est question ici consiste en ce qu'à un point quelconque de la steinérienne correspond *un* point de la hessienne, savoir le point double de sa première polaire, et il y a également unité de détermination dans la relation inverse. Mais les deux courbes présentent aussi une relation de même nature à l'égard de la cayleyenne : à un point quelconque de la courbe de Steiner correspond une tangente et par conséquent aussi un point de la cayleyenne. Le genre de cette dernière ([1]) est donc encore égal à $\frac{1}{2}(3n-7)(3n-8)$. Au moyen du

---

([1]) Ce théorème n'est pas exact à l'égard de la cayleyenne pour $n=3$, et il en est conséquemment de même alors des nombres qui suivent. Dans ce cas, en effet, la steinérienne et la hessienne se confondent, et à une tangente de la cayleyenne correspondent deux points de la hessienne.

genre, de l'ordre et de la classe de chacune de ces courbes, nous pouvons calculer leurs autres singularités par les formules de Plücker. La réalisation du calcul nous fournit le Tableau suivant, dans lequel, pour faciliter la comparaison, nous répétons les nombres relatifs à la hessienne :

	HESSIENNE.	STEINÉRIENNE.	CAYLEYENNE.
p	$\frac{1}{2}(3n-7)(3n-8)$	$\frac{1}{2}(3n-7)(3n-8)$	$\frac{1}{2}(3n-7)(3n-8)$
n	$3(n-2)$	$3(n-2)^2$	$3(n-2)(5n-11)$
k	$3(n-2)(3n-7)$	$3(n-1)(n-2)$	$3(n-1)(n-2)$
d	0	$\frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-9n-5)$	$\frac{9}{2}(n-2)(5n-13)(5n^2-19n+16)$
r	0	$12(n-2)(n-3)$	$18(n-2)(2n-5)$
t	$\frac{27}{2}(n-1)(n-2)(n-3)(3n-8)$	$\frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-3n-8)$	$\frac{9}{2}(n-2)^2(n^2-2n-1)$
w	$9(n-2)(3n-8)$	$3(n-2)(4n-9)$	0

On doit, ainsi que nous le montrerons plus tard dans l'étude des transformations univoques générales ([1]), se représenter les points doubles de la courbe de Steiner comme tirant leur origine du fait qu'à deux points séparés x de la hessienne vient correspondre un seul et même point y de la steinérienne, qui devient alors précisément un point double de cette dernière, et inversement à ce point double correspondent deux points séparés de la hessienne. *Il existe donc* $\frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-9n-5)$ *premières polaires à deux points doubles, et les pôles correspondants sont les points doubles de la steinérienne.* Les deux tangentes en ces derniers points sont, d'après ce qui précède, les polaires linéaires des deux points correspondants de la hessienne.

Si au contraire la première polaire de y a en x un rebroussement, ce qui exige également l'accomplissement de deux conditions et

([1]) Les formules données alors permettront de reconnaître facilement comment le Tableau précédent se modifie lorsque la courbe primitive possède des points doubles ou cuspidaux.

ne peut conséquemment avoir lieu que pour un nombre déterminé de points, nous avons, α_1, α_2, α_3 étant les coordonnées de la tangente de rebroussement, les six équations

$$f_{1ik}y_1 + f_{2ik}y_2 + f_{3ik}y_3 = \alpha_i\alpha_k,$$

ou, d'après les notations introduites plus haut,

$$(17) \qquad \varphi_{ik} = (n-2)\,\alpha_i\alpha_k,$$

avec

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0.$$

Nous allons maintenant montrer que dans ce cas la steinérienne a également au pôle correspondant y un point de rebroussement, c'est-à-dire (p. 57) que trois tangentes successives de cette courbe passent par le point y. En effet, au moyen des équations

$$\mu u_i = f_i,$$
$$u_i d\mu + \mu du_i = (n-1)\sum f_{ik}\,dx_k,$$

nous trouverons

$$u_i d^2\mu + 2\,d\mu\,du_i + \mu d^2 u_i$$
$$= (n-1)(n-2)\sum\sum f_{ikh}\,dx_k\,dx_h + (n-1)\sum f_{ik}\,d^2 x_k;$$

et, si nous multiplions les trois dernières équations respectivement par y_1, y_2, y_3, et que nous ajoutions, nous obtenons, puisque l'on a toujours [*voir* (4)]

$$(18) \qquad \sum u_i y_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum y_i du_i = 0,$$

en ayant égard à (1),

$$\mu\sum y_i d^2 u_i = (n-1)(n-2)\sum\sum\sum f_{ikh}\,y_i\,dx_k\,dx_h = (n-1)\sum\sum \varphi_{kh}\,dx_k\,dx_h.$$

Dans le cas d'un rebroussement on a donc, en vertu de (17),

$$(19) \qquad \mu\sum y_i d^2 u_i = (n-1)(n-2)(\alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2 + \alpha_3 dx_3)^2,$$

et cette dernière expression est nulle. Multipliant en effet les trois équations (10) respectivement par y_1, y_2, y_3 et ajoutant, nous obtenons

$$\rho v_x \sum\sum df_{ik}\,y_i y_k = \sum f_i y_i\,d\mu - \rho v_y \sum\sum f_{ik}\,dy_i\,dx_k,$$

y, $y+dy$ étant deux points de la steinérienne, x et $x+dx$ les

points correspondants de la hessienne : points dont les lignes de jonction respectives se coupent sur la ligne v. Mais les expressions qui figurent dans le second membre s'évanouissent en vertu de (18), et il en résulte, puisque v_x n'est pas nul en général,

$$\Sigma\Sigma df_{ik}y_i y_k \equiv a_y^2 a_x^{n-3} a_{dx} = 0, \tag{20}$$

a_{dx} étant égal à $a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3$. Cette équation donne d'abord le théorème suivant :

Si la première polaire de y a en x un point double, la tangente de la deuxième polaire de y touche en x la hessienne, ou, d'après un théorème précédent de la théorie des polaires, *la tangente de la hessienne en un point x est la droite quatrième harmonique à la ligne de jonction de x avec le pôle correspondant y et aux tangentes de la première polaire de y au point double x.*

Mais dans le cas d'un rebroussement on a, en vertu de (17),

$$y_1 df_{i1} + y_2 df_{i2} + y_3 df_{i3} = \alpha_i \alpha_{dx},$$

d'où

$$\Sigma\Sigma df_{ik} y_i y_k = \alpha_y \alpha_{dx},$$

et par suite, à cause de (20), $\alpha_{dx} = 0$ ou $\alpha_y = 0$. Cette dernière circonstance ne peut pas se présenter, car d'après (17) on a

$$\alpha_y \alpha_z = a_y^2 a_x^{n-3} a_z,$$

expression qui deviendrait alors nulle, et cela indépendamment des z, c'est-à-dire que la seconde polaire de y aurait un point double en x, tandis que, comme première polaire de y relativement à $a_y a_x^{n-1} = 0$, elle doit passer simplement par le point de rebroussement de cette courbe (en y touchant la tangente de rebroussement) (p. 25). Donc, en fait, pour le pôle y ont lieu simultanément, d'après (19), les trois équations

$$\Sigma u_i y_i = 0, \quad \Sigma y_i du_i = 0, \quad \Sigma y_i d^2 u_i = 0.$$

L'équation $\alpha_{dx} = 0$ fait voir de suite que le point $x + dx$ se trouve simultanément sur la hessienne et sur la tangente de rebroussement α ; nous aurons donc, en nous reportant aux nombres du Tableau, ce théorème :

Il existe $12(n-2)(n-3)$ *premières polaires qui ont un point*

de rebroussement; les pôles correspondants sont les rebroussements de la steinérienne [1]*, et les tangentes aux points de rebroussement des polaires touchent la hessienne en ces points.* Cette dernière propriété résulte immédiatement de la remarque précédente.

Nous citerons encore les relations suivantes, indiquées par Steiner entre les courbes considérées ici :

De même que la hessienne passe par les points d'inflexion de la courbe originaire, de même la steinérienne touche toutes ses tangentes d'inflexion. Cela résulte immédiatement de ce que la dernière des deux courbes est enveloppée par les polaires linéaires de la première, car pour les points d'inflexion ces droites sont les tangentes d'inflexion.

En second lieu, *deux pôles dont les polaires se touchent sont toujours situés sur une tangente de la steinérienne, et les polaires de tous les pôles situés sur l'une de ces tangentes se coupent en un seul point, le point double x, lequel appartient à la polaire du point de contact y de la tangente; la tangente commune de toutes les polaires est la ligne de jonction de x et de y; elle est donc tangente à la cayleyenne.*

Si, en effet, z et t sont deux points dont les polaires

$$\Sigma f_i z_i = 0, \quad \Sigma f_i t_i = 0$$

se touchent en x, les trois équations suivantes ont nécessairement lieu :

$$(21) \qquad z_1 f_{1k} + z_2 f_{2k} + z_3 f_{3k} = \mu(t_1 f_{1k} + t_2 f_{2k} + t_3 f_{3k})_i.$$

Si donc on pose

$$y_i = z_i - \mu t_i,$$

on a devant soi les équations (1); donc la ligne qui joint z et t renferme le point y de la steinérienne et est tangente en ce point, puisque l'équation de la tangente en y [*voir* (6)]

$$f_1 X_1 + f_2 X_2 + f_3 X_3 = 0$$

---

[1] Ce théorème a été démontré pour les courbes du quatrième ordre par Clebsch (*Journal de Borchardt*, t. 59), et en général par Cremona (*loc. cit.*).

est satisfaite pour $X = z$ et $X = t$. Enfin, l'équation des tangentes communes des polaires au point de contact x est

$$X_1 \Sigma f_{1k} z_k + X_2 \Sigma f_{2k} z_k + X_3 \Sigma f_{3k} z_k = 0.$$

Cette équation, étant satisfaite pour $X = x$ et $X = y$, représente la ligne qui joint le pôle au point double correspondant de la polaire.

De même qu'en imposant ici aux premières polaires la condition de posséder certaines singularités nous avons été conduits à des courbes covariantes, de même on peut partir des polaires d'un ordre quelconque et engendrer des figures covariantes qui, comme les courbes traitées ici, présenteront certaines singularités; mais les courbes qui ont cette origine n'ont pas encore été étudiées d'une manière approfondie.

V. — Sur les systèmes des courbes.

Après avoir poursuivi, autant que le permet le développement actuel de la théorie, certaines considérations générales se rattachant à une courbe unique, la première question qui se présente à nous est celle des relations respectives de deux courbes qui peuvent être en général d'ordres différents, c'est-à-dire celle des invariants fonctionnels *simultanés* de deux formes algébriques ternaires. Jusqu'ici, toutefois, il n'est possible de donner d'éclaircissements généraux que sur un petit nombre de points.

Un invariant simultané de deux courbes du $m^{\text{ième}}$ et du $n^{\text{ième}}$ ordre est fourni par le tactinvariant déjà mentionné plus haut (p. 84), et dont l'évanouissement exprime que les deux courbes se touchent; cet invariant est du degré $n(2m+n-3)$ par rapport aux coefficients de la courbe d'ordre m et du degré $m(2n+m-3)$ par rapport à ceux de la courbe d'ordre n; nous avons, du reste, établi cet invariant d'une manière effective pour le cas de deux coniques (t. I, p. 371).

On sera conduit à des covariants simultanés en imposant, pa exemple, que les polaires d'un certain ordre de l'une des courbes aient avec l'autre courbe une relation invariante déterminée, telle qu'une relation de contact. Si l'on prend, par exemple, une courbe du $n^{\text{ième}}$ et une du premier ordre

$$a_x^n = 0 \quad \text{et} \quad u_x = 0,$$

la condition que les polaires coniques, c'est-à-dire les $(n-2)^{\text{ièmes}}$ polaires d'un point, touchent la ligne u donne la courbe d'ordre $2(n-2)$ déjà mentionnée plus haut (p. 18) :

$$(abu)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} = 0.$$

On obtient de même, si les polaires cubiques doivent toucher la ligne u, l'équation d'ordre $4(n-3)$ (t. I, p. 346),

$$(abu)^2 (cdu)^2 (acu) (bdu) a_x^{n-3} b_x^{n-3} c_x^{n-3} d_x^{n-3} = 0.$$

Étant données ensuite une courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre et une conique

$$a_x^n = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_x^2 = 0,$$

on peut imposer la condition que, pour les deux coniques

$$a_y^{n-2} a_x^2 = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_x^2 = 0,$$

l'un des deux invariants simultanés (A_{112} ou A_{122} d'après nos notations précédentes) s'évanouisse; on obtient alors respectivement les deux courbes

$$(a\alpha\beta)^2 a_y^{n-2} = 0 \quad \text{et} \quad (ab\alpha)^2 a_y^{n-2} b_y^{n-2} = 0,$$

d'où résultent, en vertu de la signification géométrique des équations $A_{112} = 0$, $A_{122} = 0$ (t. I, p. 368), ces deux théorèmes :

1° *Le lieu d'un point dont la conique polaire possède une infinité de triangles polaires circonscrits à une conique donnée est une courbe de l'ordre* $n-2$.

2° *Le lieu d'un point dont la conique polaire est inscrite en un triangle polaire appartenant à une conique donnée (et par conséquent en une infinité) est une courbe de l'ordre* $2(n-2)$.

Si l'on impose ensuite aux courbes covariantes qui ont cette origine des propriétés invariantes déterminées, on sera conduit de nouveau à des invariants simultanés des deux courbes données. Ainsi, par exemple, pour $n=4$, la courbe du $(n-2)^{\text{ième}}$ ordre dont l'équation a été établie ci-dessus est la conique

$$(a\alpha\beta)^2 a_x^2 = 0,$$

et, suivant que cette courbe doit se décomposer ou présenter à

l'égard de la conique donnée les relations invariantes dont il a été question, on obtient les conditions invariantes qui suivent :

$$A = (a\alpha\beta)^2 (b\gamma\delta)^2 (c\varepsilon\zeta)^2 (abc)^2 = 0,$$
$$B = (a\alpha\beta)^2 (a\gamma\delta)^2 = 0,$$
$$C = (a\alpha\beta)^2 (\beta\gamma\delta)^2 (ab\varepsilon)^2 = 0,$$

où les symboles β, γ, δ, ε, ζ ont tous la même signification que α. Ces exemples, choisis tout à fait arbitrairement, suffiront pour donner une idée de la diversité des formations qui peuvent se présenter.

Si les deux courbes considérées ($f = 0$, $\varphi = 0$) appartiennent au même ordre, que nous désignerons par n, il existe une infinité de courbes du $n^{\text{ième}}$ ordre qui passent par leurs n^2 points d'intersection (¹), et qui forment le *faisceau*

$$f + \lambda\varphi = 0,$$

et, pour préciser, par chaque point du plan passe une courbe du faisceau. De même que dans un faisceau de coniques on rencontre en général trois couples de lignes, c'est-à-dire trois courbes à point double, de même il se trouvera parmi les courbes du faisceau $f + \lambda\varphi = 0$ un nombre déterminé de courbes à points doubles, car imposer un point double donne une condition relativement aux coefficients de la courbe $f + \lambda\varphi$, et par conséquent une équation pour λ, à savoir l'évanouissement du discriminant. Or, pour une courbe d'ordre n, cette dernière fonction est du degré $3(n-1)^2$ par rapport aux coefficients, et conséquemment dans notre cas par rapport à λ. *Il existe donc en général dans un faisceau de courbes du $n^{\text{ième}}$ ordre $3(n-1)^2$ courbes à point double.* Ce nombre peut toutefois subir une réduction lorsque les courbes f et φ se touchent, lorsque dans le faisceau se rencontre une courbe à point de rebroussement, lorsque toutes les courbes ont un point double commun et dans d'autres éventualités semblables (²). Dans ces cas,

(¹) Ceci n'est point en contradiction avec le fait qu'une courbe d'ordre n est déjà déterminée par $\frac{n(n+3)}{2}$ points, car les n^2 points ne sont pas indépendants les uns des autres. (*Voir* le t. III de ces Leçons.)

(²) *Voir*, sur ce sujet, CREMONA, *Einleitung in die Theorie ebener Curven*.

$3(n-1)^2$ désigne à la fois le nombre des solutions proprement dites et le nombre des solutions improprement dites, si chacune de ces dernières est comptée au degré exact de multiplicité.

On peut de même demander, en général, que pour une courbe du faisceau un invariant déterminé s'évanouisse; *il y aura toujours alors* μ *courbes de l'espèce voulue dans le faisceau si l'invariant est du degré* μ *par rapport aux coefficients de la courbe du* $n^{\text{ième}}$ *ordre*. On peut aussi mettre le faisceau en relation avec une courbe d'ordre m donnée arbitrairement; il y aura alors un nombre déterminé de courbes pour lesquelles un des invariants simultanés possédés en commun avec la forme d'ordre n s'évanouira. Conformément aux nombres indiqués plus haut pour le degré du tactinvariant, *il existe, par exemple, dans un faisceau du* $n^{\text{ième}}$ *ordre,* $m(2n+m-3)$ *courbes qui touchent une courbe donnée d'ordre* m. Si toutefois cette dernière courbe a des points doubles, parmi ces $m(2n+m-3)$ courbes tangentes du faisceau sont encore comprises celles qui passent par les points doubles, car dans un point double deux intersections se trouvent aussi réunies. Mais toute courbe de cette nature absorbe deux courbes tangentes *proprement dites* du faisceau. On le reconnaît géométriquement par le procédé employé à propos des formules de Plücker pour établir que tout point double d'une courbe diminue sa classe de deux unités, c'est-à-dire en faisant successivement dégénérer la courbe fixe du $m^{\text{ième}}$ ordre en une courbe à point double et en considérant alors que dans les deux parties courbes se trouvaient deux points de contact confondus ensuite au point double (*fig.* 18, p. 55). Si enfin l'on fait en sorte que la boucle du point double se rétrécisse de plus en plus, un autre point de contact se réunira, à la limite, avec le point de rebroussement ainsi obtenu. *Le nombre des courbes du* $n^{\text{ième}}$ *ordre d'un faisceau qui ont un contact proprement dit avec une courbe d'ordre* m *possédant* d *points doubles et* r *points de rebroussement* est donc égal à

$$m(2n+m-3)-2d-3r,$$

ou, si nous introduisons le genre $p=\frac{1}{2}(m-1)(m-2)-d-r$ (p. 65), égal à

$$2(mn+p-1)-r,$$

nombre que nous déduirons plus tard par une autre voie de considérations plus générales (¹).

A la considération des faisceaux se rattache un mode de génération simple d'une courbe algébrique au moyen de courbes d'ordre moins élevé, qui peut être considéré comme une généralisation du mode de génération des coniques par deux faisceaux projectifs de rayons. A la place de ces derniers, prenons en effet deux faisceaux de courbes quelconques d'ordres m et n respectivement,

$$(1)\qquad F + \lambda\Phi = 0, \quad f + \mu\varphi = 0,$$

et établissons entre eux une relation telle qu'à chaque courbe de l'un corresponde *une* courbe de l'autre et inversement, de sorte qu'entre leurs paramètres λ, μ existe une équation linéo-linéaire

$$(2)\qquad a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0;$$

le lieu des points d'intersection des courbes correspondantes des deux faisceaux liés projectivement l'un à l'autre est alors une courbe du $(m+n)^{\text{ième}}$ ordre, dont l'équation s'obtient en éliminant λ, μ entre les trois équations (1) et (2).

Si l'on prend la relation projective, ce qui est toujours permis, sous la forme simple où deux courbes ayant même paramètre λ se correspondent dans les faisceaux (1), la courbe résultante est donnée par

$$F\varphi - \Phi f = 0;$$

elle est donc effectivement de l'ordre $m+n$, et l'on reconnaît qu'elle passe par tous les points de base des deux faisceaux. On peut se représenter géométriquement la relation projective des faisceaux comme ayant l'origine suivante. Posons

$$F = a_x^m, \quad \Phi = a_x'^m,$$
$$f = \alpha_x^n, \quad \varphi = \alpha_x'^n,$$

et soient y un point de base du premier faisceau, z un point de base du second; les tangentes de toutes les courbes des deux faisceaux en ces points fondamentaux forment deux faisceaux de rayons

(¹) *Voir* ci-après la Section VIII sur l'extension du principe de correspondance.

donnés par

$$a_y^{m-1} a_x + \lambda a'^{m-1}_y a'_x = 0,$$
$$\alpha_z^{n-1} \alpha_x + \lambda \alpha'^{n-1}_z \alpha'_x = 0.$$

Ces faisceaux de rayons sont projectifs l'un par rapport à l'autre, et l'on peut à l'inverse établir la corrélation de deux faisceaux de courbes en reliant projectivement deux semblables faisceaux de tangentes, car à chaque tangente correspond une courbe unique du faisceau auquel elle se rapporte.

Ici se pose la question de savoir si la courbe engendrée est la plus générale de son espèce et si toute courbe algébrique peut être engendrée de cette manière. Nous serons plus tard en situation de répondre affirmativement à cette question, en montrant que sur toute courbe on peut toujours déterminer deux systèmes de points qui peuvent être employés comme points de base de deux faisceaux projectifs pour la génération de la courbe donnée (1).

Nous passons à la considération simultanée de *trois courbes*. Parmi les formations invariantes simultanées auxquelles elles donnent naissance, il en est une qui a été spécialement étudiée jusqu'à présent et à laquelle nous aurons uniquement égard ici : c'est la jacobienne des trois courbes primitives. Supposons ces dernières données par les équations

$$\varphi = a_x^m = 0, \quad \psi = a'^{m'}_x = 0, \quad \chi = a''^{m''}_x = 0;$$

la jacobienne sera représentée par l'évanouissement de leur déterminant fonctionnel, c'est-à-dire par

$$\frac{1}{mm'm''}\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi}{\partial x_2} & \frac{\partial\psi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\chi}{\partial x_1} & \frac{\partial\chi}{\partial x_2} & \frac{\partial\chi}{\partial x_3} \end{vmatrix} \equiv (aa'a'')\, a_x^{m-1} a'^{m'-1}_x a''^{m''-1}_x = 0.$$

(1) Ce théorème a été donné pour les courbes du troisième ordre par Chasles (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XLI, 1853) et dans sa généralité par DE JONQUIÈRES, *Essai sur la génération des courbes géométriques* (*Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, t. XVI, 1858). Dans ce travail se trouvent traités beaucoup de problèmes de construction se rapportant au théorème dont il s'agit. Pour les courbes du troisième ordre, *voir* le second Chapitre du présent Volume.

La jacobienne est donc de l'ordre $m + m' + m'' - 3$, et, comme on l'aperçoit immédiatement, elle est le lieu des points dont les polaires linéaires relativement aux trois courbes données se coupent en un même point (¹).

La jacobienne possède en particulier la propriété de *passer par les points communs aux trois courbes*. Si, en effet, l'on multiplie les deux premières lignes du déterminant fonctionnel par x_1, x_2 respectivement, et qu'on les ajoute à la troisième multipliée par x_3, cette dernière se trouve alors composée des termes $m\varphi$, $m'\psi$, $m''\chi$, et le déterminant s'évanouit en même temps que ces fonctions.

Dans ce cas, il se présente une particularité très-importante pour les applications ultérieures lorsque deux des courbes primitives sont du même ordre; on a alors ce théorème :

La jacobienne de trois courbes $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$ touche en chacun de leurs points communs la courbe $\chi = 0$ lorsque φ et ψ sont du même ordre; si le point commun est un point double pour χ, ce point sera également un point double pour la jacobienne, et les tangentes de cette dernière courbe en ce point se confondront avec celles de $\chi = 0$ (²).

Pour le démontrer, comparons les dérivées partielles de χ pour les coordonnées du point considéré avec celles du déterminant fonctionnel ($m = m'$, $m'' + 2m' - 3 = \mu$)

$$\Delta_x^\mu = (aa'a'')\, a_x^{m'-1}\, a_x'^{m'-1}\, a_x''^{m''-1}.$$

Or, nous avons

$$\mu\Delta_x^{\mu-1}\Delta_z = (aa'a'')\, a_x^{m'-2}\, a_x'^{m'-2}\, a_x''^{m''-2}$$
$$\times\left[(m''-1)\, a_x a'_x a''_z + (m'-1)\, a''_x a_x a'_z + (m'-1)\, a'_x a''_x a_z\right],$$

(¹) Observons qu'ici, comme pour les coniques, on a le théorème suivant : *Si le déterminant fonctionnel de trois courbes de même ordre est identiquement nul, les trois courbes appartiennent au même faisceau.* La démonstration a la même marche que dans les formes quadratiques; on doit seulement multiplier toutes les équations dont il est question (t. I, p. 379) par les facteurs symboliques a_x^{m-2}, $a_x'^{m-2}$, $a_x''^{m-2}$. Toutefois, des considérations plus approfondies deviennent nécessaires lorsque les points d'intersection coïncident, et le théorème subit des exceptions lorsque les trois courbes considérées se composent partiellement de branches comptant plusieurs fois. (*Voir*, sur ce sujet, GORDAN et NÖTHER, *Math. Annalen*, t. X.)

(²) *Voir* HESSE, *Journal de Crelle*, t. 41, p. 286, et CLEBSCH, *Curven deren Coordinaten ellipt. Functionen eines Parameters sind* (*ibid.*, t. 64).

et, si nous multiplions par u_x, les u_i étant des quantités purement arbitraires (sous la seule condition de $u_x >$ ou $<$ o), et que nous fassions usage de l'identité

$$(3)\qquad (aa'a'')\,u_x = (aa'u)\,a''_x - (aa''u)\,a'_x + (a'a''u)\,a_x,$$

nous obtiendrons, par suite de ce que les termes multipliés par φ, ψ, χ sont nuls,

$$(4)\left\{\begin{aligned}\mu\,\Delta_x^{\mu-1}\Delta_z u_x = {} & (m''-1)\,a''^{m''-1}_x a''_z (aa'u)\,a^{m'-1}_x a'^{m'-1}_x \\ & + (m'-1)\,a^{m'-1}_x a'^{m'-1}_x a''^{m''-1}_x\,[(a''au)\,a'_z + (a'a''u)\,a_z].\end{aligned}\right.$$

Mais ici le dernier terme se réduit au premier, à cause de $\Delta = $ o, car on a identiquement

$$(5)\qquad (a''au)\,a'_z + (a'a''u)\,a_z = (aa'a'')\,u_z - (aa'u)\,a''_z,$$

et il vient, par conséquent,

$$\mu\,\Delta_x^{\mu-1}\Delta_z u_x = (m''-m')\,a''^{m''-1}_x a''_z (aa'u)\,a^{m'-1}_x a'^{m'-1}_x,$$

c'est-à-dire, puisque le facteur $(aa'u)\;a^{m'-1}_x\;a'^{m'-1}_x$ peut toujours être supposé différent de zéro à cause de la qualité arbitraire des u, que la tangente de Δ en x coïncide avec celle de χ, ce qu'il fallait démontrer.

Mais, si x est un point double de $\chi = $ o, le second membre est nul indépendamment des z; il en est donc de même du premier, c'est-à-dire que $\Delta = $ o a également en x un point double. Les tangentes de ce dernier s'obtiendront, à cause de l'évanouissement de $a''^{m''-1}_x a''_z$, en égalant à zéro l'expression suivante, dans laquelle C est un facteur numérique :

$$\mu(\mu-1)\,\Delta_x^{\mu-2}\Delta_z^2 u_x = \mathrm{C}\,a''^{m''-2}_x a''^2_z (aa'u)\,a^{m'-1}_x a'^{m'-1}_x,$$

c'est-à-dire que les tangentes du point double de Δ se confondent avec celles du point double de χ.

On peut obtenir une généralisation du théorème ainsi démontré dans le cas où le point commun x est pour les courbes φ et ψ un point multiple d'ordre $r-1$ et d'autre part pour χ un point multiple d'ordre r; nous supposons d'ailleurs ici que les tangentes des différentes courbes en x ont un cours séparé. Dans ce cas, les dérivées partielles $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial\psi}{\partial x_i}$ s'annulent $r-2$ fois au point x, et les

dérivées $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ $r-1$ fois. Le déterminant Δ formé avec elles aura, par suite, une racine de l'ordre

$$2(r-2)+r-1=3r-5.$$

La courbe $\Delta=0$ a donc en x un point dont l'ordre de multiplicité est au moins $3r-5$. Pour un plus ample examen, observons que la $(\mu-s)^{\text{ième}}$ polaire de x relativement à $\Delta=0$ est donnée par l'évanouissement de l'expression suivante :

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} &\mu(\mu-1)\ldots(\mu-s+1)\Delta_x^{\mu-s}\Delta_z^s \\ &= (aa'a'')\sum_{i=0}^{i=s}\sum_{k=0}^{k=s}\sum_{l=0}^{l=s} m'_i\, m'_k\, m''_l\, a_x^{m'-i-1}\, a_x'^{m'-k-1}\, a_x''^{m'-l-1}\, a_z^i\, a_z'^k\, a_z''^l \end{aligned} \right.$$

dans laquelle $i+k+l=s$ et où l'on a posé, pour abréger,

$$m'_i=(m'-1)(m'-2)\ldots(m'-i),$$

m''_l devant être défini d'une manière correspondante. Si maintenant, en vertu de nos hypothèses précédentes, les équations

$$(7)\qquad a_x^{m'-r+2}a_z^{r-2}\equiv 0,\quad a_x'^{m'-r+2}a_z'^{r-2}\equiv 0,\quad a_x''^{m''-r+1}a_z''^{r-1}\equiv 0$$

ont lieu indépendamment des z, tous les termes de la triple somme écrite ci-dessus qui renferment un des facteurs symboliques $a_x^{m'-r+2}$, $a_x'^{m'-r+2}$, $a_x''^{m''-r+1}$ ou, ce qui revient au même, un des facteurs a_z^{r-3}, $a_z'^{r-3}$, $a_z''^{r-2}$, disparaissent, et il ne reste plus, en conséquence, que des termes multipliés par les facteurs

$$a_z^{r-2},\quad a_z'^{r-2},\quad a_z''^{r-1}$$

ou par des puissances plus élevées de a_z, a'_z, a''_z. Mais pour $s=3r-5$, à cause de la relation $i+k+l=s$, la plus haute puissance de a''_z qui puisse se rencontrer est précisément la $(r-1)^{\text{ième}}$, puisque

$$r-1=3r-5-2(r-2).$$

Notre somme se réduit donc, abstraction faite d'un facteur numérique, au terme unique

$$(aa'a'')\,a_x^{m'-r+1}\,a_x'^{m'-r+1}\,a_x''^{m''-r}\,a_z^{r-2}\,a_z'^{r-2}\,a_z''^{r-1}.$$

Si nous multiplions ce dernier terme par u_x et que nous fassions de nouveau usage de l'identité (3), nous obtiendrons une combinaison linéaire des expressions nulles (7), et par conséquent un résultat égal à zéro : $\Delta = 0$ *a donc en x un point multiple d'ordre* $3r - 4$.

Recherchons ensuite les tangentes de Δ en ce point, c'est-à-dire formons la somme (6) pour $s = 3r - 4$. Dans cette somme, tous les termes multipliés par a_z^{r-3}, $a_z'^{r-3}$, $a_z''^{r-3}$ disparaissent encore, et, à cause de $i + k + l = 3r - 4$, la plus haute puissance à laquelle a_z'' puisse entrer est égale à

$$3r - 4 - 2(r - 2) = r,$$

tandis que la moins élevée est égale à $r - 1$. D'après cela, il reste dans la somme en question un terme

$$(8) \qquad (aa'a'')\, u_x^{m'-r+1}\, a_x'^{m'-r+1}\, a_x''^{m''-r-1}\, a_z^{r-2}\, a_z'^{r-2}\, a_z''^{r}$$

et deux termes dont la somme renferme les facteurs symboliques

$$(9) \qquad (aa'a'')\, a_z''^{r-1}\, a_z^{r-2}\, a_z'^{r-2}\, (a_z a_x' + a_x a_z').$$

Si nous multiplions ces facteurs par u_x, et que nous appliquions de nouveau l'identité (3), ils deviennent égaux à

$$a_x a_x' [(a'a''u)\, a_z - (aa''u)\, a_z']\, a_z''^{r-1}\, a_z^{r-2}\, a_z'^{r-2},$$

ce qui est, d'après l'identité (5), égal à

$$a_x a_x' [(aa'a'') . u_z - (aa'u)\, a_z'']\, a_z''^{r-1}\, a_z^{r-2}\, a_z'^{r-2}.$$

Mais ici le premier terme est le terme qui se présente dans le développement de $\Delta_x^{\mu-3r+5}\, \Delta_z^{3r-5}$, et il est en conséquence nul, tandis que le second terme comprend le facteur $a_z''^{r}$, comme le premier terme (8) mentionné plus haut. Or les symboles a'' ne figurent plus dans son second facteur entre parenthèses $(aa'u)$; il renferme donc aussi le facteur $a_x''^{m''-r}$. Nous pouvons reconnaître ce dernier facteur dans le terme (8) en multipliant de même par u_x et en appliquant l'identité (3). Il reste, en vertu de (7), précisément le même terme auquel nous venons de réduire la somme (9), et l'on a, en conséquence, C désignant un facteur numérique,

$$\Delta_x^{\mu-3r+4}\, \Delta_z^{3r-4} = \mathrm{C} . a_x''^{m''-r}\, a_z''^{r} . (aa'u)\, a_x^{m'-r+1}\, a_x'^{m'-r+1}\, a_z^{r-2}\, a_z'^{r-2}.$$

L'expression qui figure dans le premier membre renferme donc le facteur $a_x''^{m''-r} a_z''^{r}$, qui détermine le produit des r tangentes de $\chi = 0$ en x. D'où l'on déduit ce théorème :

Si deux courbes de même ordre ont en un de leurs points communs un point multiple d'ordre $r-1$, et qu'en ce même point une troisième courbe possède un point multiple d'ordre r (tous à tangentes séparées), la jacobienne a au lieu dont il s'agit un point multiple d'ordre $3r-4$, dont r tangentes coïncident avec les tangentes de la troisième courbe.

Ce théorème n'est pas modifié si parmi les tangentes de la courbe χ en x plusieurs coïncident par groupes. Si, au contraire, les courbes φ et ψ ont en commun les $r-1$ tangentes de leur point multiple, $a_x^{m'-r+1} a_z^{r-1}$ devient proportionnel à $a_x'^{m'-r+1} a_z'^{r-1}$, et l'on reconnaît que Δ acquiert un point multiple de l'ordre $3(r-1)$.

Il se présente encore d'autres particularités si quelques-unes de ces tangentes communes de φ et ψ ou toutes sont en même temps tangentes du point multiple de χ.

Si enfin les trois courbes sont du même ordre ($m = m' = m''$), on peut remplacer chacune d'elles par une courbe quelconque du système

$$(10) \qquad \varkappa\varphi + \lambda\psi + \mu\chi = 0$$

sans faire varier la jacobienne. On appelle aussi dans ce cas cette dernière courbe la hessienne du système, et l'on désigne le système sous le nom de *réseau*. *La jacobienne est, par conséquent, une combinante de ce dernier* (t. I, p. 378). Un réseau est caractérisé analytiquement par le fait que chacune de ses courbes dépend linéairement de deux paramètres ; il le sera donc géométriquement par cette circonstance que toutes ses courbes qui passent par un point déterminé forment un faisceau, car, si l'on substitue les coordonnées de ce point dans (4), on peut exprimer l'un des paramètres $\frac{\varkappa}{\mu}$, $\frac{\lambda}{\mu}$ linéairement au moyen de l'autre. Par suite, la réunion des courbes d'ordre n qui passent par $\frac{n(n+3)}{2} - 2$ points fixes forme l'exemple le plus simple d'un réseau. Un autre exemple nous est fourni par l'ensemble des premières polaires

appartenant à une courbe donnée ($a_x^n = 0$)

$$a_x^{n-1} a_y = 0,$$

$\frac{y_1}{y_3}$ et $\frac{y_2}{y^3}$ devant alors être considérés comme les deux paramètres qui entrent linéairement. Pour ce réseau, la hessienne se confond avec la hessienne de la courbe primitive, car nous pouvons, entre autres manières, définir la première par le théorème suivant :

Il existe dans un réseau une infinité de courbes à point double ; le lieu de ces points doubles est la hessienne ou la jacobienne du réseau.

L'élimination de $\varkappa$, λ, μ entre les trois équations qui représentent les conditions nécessaires pour un point double

$$\varkappa a_x^{m-1} a_i + \lambda a_x'^{m-1} a_i' + \mu a_x''^{m-1} a_i'' = 0$$

conduit, en effet, au déterminant fonctionnel de φ, ψ, χ.

Nous pouvons enfin donner pour cette courbe une troisième définition. Il arrivera un nombre infini de fois que deux courbes et par conséquent un nombre infini de courbes du réseau se touchent en un point, car ceci exige l'accomplissement d'*une seule* condition à l'égard des deux paramètres arbitraires. Soient maintenant $\varphi = 0$, $\psi = 0$ deux courbes du réseau ainsi tangentes ; toute courbe

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{vmatrix} = 0,$$

les ν pouvant avoir des valeurs quelconques, passera par leur point de contact, ainsi que nous l'avons montré (p. 84). Or, si nous posons $\nu_i = \frac{\partial \chi}{\partial x_i}$, on n'a là autre chose que la hessienne de notre réseau, d'où la conclusion suivante :

La hessienne d'un réseau est le lieu des points où peuvent se toucher deux courbes du réseau.

Il existe pour ces courbes, relativement à la manière dont elles se comportent à l'égard des points remarquables du réseau, des

théorèmes tout à fait semblables à ceux qui ont lieu pour le réseau des premières polaires à l'égard des points singuliers de la courbe originaire. Nous mentionnerons seulement le suivant : *En un point commun à toutes les courbes du réseau, la hessienne possède un point double* (¹). Pour $m' = m'' = m$ en effet, l'équation (4) se transforme en

$$\begin{aligned}\mu\Delta_x^{\mu-1}\Delta_z . u_x &= (m-1)[(aa'u)a''_z + (a'a''u)a_z + (a''au)a'_z]\, a_x^{m-1} a_x'^{m-1} a_x''^{m-1} \\ &= (m-1)(aa'a'')\, a_x^{m-1} a_x'^{m-1} a_x''^{m-1} . u_z = (m-1)\Delta_x^{\mu} u_z;\end{aligned}$$

l'expression $\Delta_x^{\mu-1}\Delta_z$ est donc nulle indépendamment des z, puisque, d'après ce qui précède, on a pour le point commun $\Delta = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Si, au contraire, pour le point x existent les trois équations

$$(10) \qquad a_x^{m-r+1} a_z^{r-1} \equiv 0, \quad a_x'^{m-r+1} a_z'^{r-1} \equiv 0, \quad a_x''^{m-r+1} a_z''^{r-1} \equiv 0,$$

la jacobienne a toujours en x un point multiple d'ordre $3(r-1)$, puisque les premières dérivées partielles de φ, ψ, χ s'annulent encore ici au degré de multiplicité $r-1$, c'est-à-dire que l'on a

$$\Delta_x^{\mu-3r+4}\Delta_z^{3r-4} \equiv 0.$$

Or, si l'on forme ensuite l'expression $\Delta_x^{\mu-3r+3}\Delta_z^{3r-3}$ suivant l'équation (6), les facteurs a_z, a'_z, a''_z ne peuvent entrer dans les termes de la somme, à cause de (10), qu'à la puissance $r-1$ ou à une puissance plus élevée. La somme renferme donc le terme unique

$$(aa'a'')\, a_x^{m-r} a_x'^{m-r} a_x''^{m-r} a_z^{r-1} a_z'^{r-1} a_z''^{r-1}.$$

Si on le multiplie par u_x, et qu'on fasse usage de l'identité (3), on voit qu'il est nécessairement nul. D'après des principes tout à fait identiques, l'expression $\Delta_x^{\mu-3r+2}\Delta_z^{3r-2}$ se réduit, abstraction faite d'un facteur numérique, à l'expression

$$\begin{aligned}&(aa'a'')\, a_x^{m-r-1} a_x'^{m-r-1} a_x''^{m-r-1} a_z^{r-1} a_z'^{r-1} a_z''^{r-1} \\ &\quad \times (a_z a'_x a''_x + a_x a'_z a''_x + a_x a'_x a''_z),\end{aligned}$$

(¹) *Voir*, pour d'autres théorèmes de cette espèce, ainsi qu'en général pour la théorie des réseaux, CREMONA, *Einleitung in die Theorie der algebraischen Curven*, surtout l'*Appendice* dans l'édition allemande. Sur le nombre des courbes à point de rebroussement ou à deux points doubles dans un réseau général, *voir* DE JONQUIÈRES, *Math. Annalen*, t. I, p. 424.

et, si l'on applique de nouveau à chaque terme, après multiplication par u_x, les identités (3) et (5), il vient

$$\begin{aligned}(aa'a'')(a_z a'_x a''_x + a_x a'_z a''_x + a_x a'_x a''_z)\,u_x \\ = a_x a'_x a''_x[(aa'u)a''_z - (aa''u)a'_z + (a'a''u)a_z] \\ = a_x a'_x a''_x (aa'a'')u_z.\end{aligned}$$

Si nous ajoutons enfin de nouveau les autres facteurs symboliques, nous obtenons le terme du développement de l'expression évanouissante $\Delta_x^{\mu-3r+3}\Delta_z^{3r-3}$, c'est-à-dire que l'on a aussi

$$\Delta_x^{\mu-3r+2}\Delta_z^{3r-2} \equiv 0.$$

Si donc toutes les courbes d'un réseau ont en un point fixe un point multiple d'ordre r, la jacobienne a au même lieu un point multiple (¹) *d'ordre* $3(r-1)$.

Au point de vue auquel nous nous sommes placés d'abord, la hessienne s'est montrée à nous comme le lieu des points dont les polaires linéaires relativement à toutes les courbes du réseau se coupent en un même point; ces points décrivent une autre courbe, *la steinérienne du réseau*, dont l'équation s'obtient en éliminant les quantités x entre les trois équations

$$a_x^{m-1}a_z = 0, \quad a'^{m-1}_x a'_z = 0, \quad a''^{m-1}_x a''_z = 0.$$

La steinérienne est donc de l'ordre $3(m-1)^2$; conformément à sa définition, elle est liée à la hessienne par une relation à détermination unique.

Enfin une troisième courbe, *la cayleyenne du réseau*, sera enveloppée par les lignes qui joignent les points correspondants de la

---

(¹) Comme toutes les premières polaires d'une courbe algébrique ont, en un point multiple d'ordre r de cette dernière, un point multiple d'ordre $r-1$, et que la jacobienne du réseau de ces polaires est en même temps la hessienne de la courbe primitive, il en résulte que *la hessienne possède, en un point multiple d'ordre r pour la courbe, un point multiple d'ordre* $3r-4$. On vérifie facilement que r tangentes de ce dernier coïncident avec les r tangentes de la courbe primitive; donc au point multiple se trouvent réunies $r(3r-4)+r = 3r(r-1)$ intersections des deux courbes. Il suit de là qu'un point multiple d'ordre r dans une courbe absorbe $3r(r-1)$ points d'inflexion, c'est-à-dire autant que $\frac{1}{2}r(r-1)$ points doubles. Ce résultat est conforme aux observations précédentes (p. 34).

hessienne et de la steinérienne; *elle est de la classe* $3m(m-1)$. En effet, le théorème suivant est vrai d'une manière générale ([1]) :

Si deux courbes d'ordre m et m' sont liées par une relation à détermination unique, les lignes de jonction des points correspondants enveloppent une courbe de classe $m+m'$.

Pour le démontrer considérons un faisceau de rayons quelconque. Chaque rayon u de ce faisceau coupe l'une des courbes en m points, à chacun desquels correspond un point de l'autre courbe; joignons ces derniers au sommet du faisceau par les lignes v. Nous avons alors en ce sommet entre les rayons u et v une correspondance (t. I, p. 261) de telle nature qu'à chaque rayon u répondent m rayons v et qu'à chaque rayon v répondent de même m' rayons u. D'après le principe de correspondance de M. Chasles, il arrivera donc $(m+m')$ fois que deux lignes correspondantes u et v coïncident; c'est-à-dire que par un point quelconque passent $m+m'$ lignes joignant des points correspondants des deux courbes, ce qu'il fallait démontrer.

Il existe, à l'égard des singularités de la *steinérienne* et de la *cayleyenne*, des théorèmes analogues à ceux qui ont lieu dans des circonstances semblables pour le réseau des premières polaires. Toutefois, cette corrélation n'est nullement telle que tout réseau d'ordre m puisse être considéré comme le système polaire d'une courbe d'ordre $m+1$. Trois courbes quelconques d'un réseau général dépendent en effet de $\frac{3}{2}m(m+3)$ constantes; trois courbes quelconques du $m^{\text{ième}}$ ordre d'un système de premières polaires dépendent au contraire des $\frac{(m+1)(m+4)}{2}$ constantes de la courbe primitive et des six coordonnées de leurs trois pôles, par conséquent en tout de $\frac{1}{2}(m+1)(m+4)+6$ constantes seulement. Néanmoins les deux nombres sont égaux pour $m=2$. *Un réseau de coniques peut donc toujours, d'après cette supputation préliminaire, être considéré comme le système des premières polaires d'une courbe*

([1]) Nous aurions pu déterminer d'une manière identique la classe de la cayleyenne d'une courbe (p. 82). La méthode de supputation dont il est fait usage dans le texte est très-utile pour les problèmes de même nature.

du troisième ordre. Du reste, dans la théorie des courbes du troisième ordre qui suivra plus tard, nous reviendrons avec plus de détails sur ce sujet.

De la considération des réseaux on peut s'élever à l'étude des systèmes de courbes qui dépendent de 3, 4, ... paramètres, et qui représentent, par suite, des familles triplement, quadruplement infinies; on peut ainsi, dans les courbes du $n^{\text{ième}}$ ordre, aller jusqu'à un système à $\frac{1}{2}n(n+3)$ paramètres entrant linéairement, système qui embrasse la totalité des courbes du $n^{\text{ième}}$ ordre. Le type le plus simple d'un système r fois infini sera toujours donné par l'ensemble des courbes d'ordre n qui possèdent $\frac{1}{2}n(n+3)-r$ points communs. On doit d'ailleurs étudier corrélativement, en vertu du principe de dualité, les systèmes de courbes dont l'équation en coordonnées lignes renferme linéairement un certain nombre de paramètres. Mais il est digne de remarque qu'à un système r fois infini de courbes du $n^{\text{ième}}$ ordre est toujours associé un système déterminé $\left[\frac{1}{2}n(n+3)-r-1\right]$ fois infini de courbes de la $n^{\text{ième}}$ classe, et cela se produit d'une manière analogue à ce qui arrive pour une ligne droite u (c'est-à-dire pour une courbe du premier ordre, d'où $n=1$, $r=0$), à laquelle, en vertu de la condition

$$(11) \qquad u_x = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0,$$

est associé un nombre de points simplement infini qui sont réunis avec elle. Deux courbes

$$a_x^n = 0 \quad \text{et} \quad u_\alpha^n = 0$$

donnent en effet naissance à l'invariant simultané a_α^n, linéaire par rapport aux coefficients des deux équations. Si nous regardons les a comme donnés et les α comme des paramètres, *à la courbe fixe* $a_x^n = 0$ *sera associé, par l'équation*

$$a_\alpha^n = 0,$$

un système linéaire $\frac{1}{2}[n(n+3)-1]$ *fois infini de courbes de*

$n^{\text{ième}}$ classe placées en situation réunie avec la première (¹).

Soit plus généralement un système linéaire r fois infini donné par l'équation

$$\lambda_0 a_x^n + \lambda_1 a_x'^n + \ldots + \lambda_r a^{(r)}{}_x^n = 0;$$

il existe un système de courbes de $n^{\text{ième}}$ classe $u_\alpha^n = 0$ satisfaisant individuellement aux $r+1$ équations

$$a_\alpha^n = 0, \quad a_\alpha'^n = 0, \quad \ldots, \quad a_\alpha^{(r)n} = 0,$$

système qui se trouve dépendre encore ainsi de $\frac{1}{2}n(n+3) - r - 1$ paramètres arbitraires. *Nous dirons que ce système est en situation réunie avec le premier* (²).

Réciproquement aussi, étant donné un système

$$\lambda_0 u_\alpha^n + \lambda_1 u_{\alpha'}^n + \ldots + \lambda_r u_{\alpha^{(r)}}^n = 0,$$

il existera naturellement un système de courbes $a_x^n = 0$ placé en situation réunie avec le premier en vertu des $r+1$ équations

$$a_{\alpha^{(i)}}^n = 0.$$

Si en particulier les $\alpha_k^{(i)}$ ne sont pas des symboles de forme $u_{\alpha^{(i)}}^n$, mais réellement des coordonnées de points, les courbes du système passent réellement par ces points; dans ce cas, nos appellations ont une interprétation géométrique immédiate. Cependant jusqu'ici une interprétation semblable n'a pu être donnée dans le cas général; en ce qui concerne les coniques seulement, le sens de la condition

---

(¹) On peut considérer les coefficients d'une courbe comme des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots$ (coordonnées) dans une multiplicité (espace) de $\frac{1}{2}n(n+3)$ dimensions; alors, à chaque point de cette multiplicité correspond une courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre, et aux courbes de $n^{\text{ième}}$ classe, placées avec elle en situation réunie, les plans en nombre $\frac{1}{2}n(n+3) - 1$ fois infini ($u_x = 0$) qui passent par le point cité. Aux multiplicités linéaires auxquelles donne naissance l'intersection de différents plans $u_x = 0$, $v_x = 0, \ldots$, ou la jonction de différents points, correspondent alors les faisceaux, les réseaux, etc., et les figures qui sont placées en situation réunie avec eux.

(²) Rosanes (*loc. cit.*) se sert pour cette relation du mot *conjugué* (*voir* la note de la p. 368, t. I); en ce qui concerne les recherches correspondantes relativement aux formes binaires, consulter un Mémoire du même auteur : *Ueber ein Princip der Zuordnung algebraischer Formen* (*Journal de Crelle*, t. 76), ainsi que Sturm (*ibid.*, t. 86).

$a_x^2 = 0$ est connu (t. I, p. 368). Pour les coniques placées en situation réunie, on doit distinguer rigoureusement quelle est celle qui est supposée donnée en coordonnées points, quelle est celle supposée donnée en coordonnées lignes, car pour ces courbes l'ordre est égal à la classe, et comme contre-partie de l'invariant A_{112} se rencontre immédiatement l'autre invariant A_{122} qui lui correspond dualistiquement (t. I, p. 360). Si pour $n = 2$ on a en particulier $r = 2$, il existe, en situation réunie avec un réseau de coniques, un système aussi doublement infini de coniques, et les deux systèmes présentent l'un avec l'autre des relations intéressantes et variées. Nous reviendrons sur ce sujet à propos des courbes du troisième ordre.

Nous pouvons aussi considérer les paramètres qui entrent dans un réseau comme les coordonnées d'un point du plan. Si nous les désignons d'après cela par y_1, y_2, y_3, l'équation du réseau

$$\varphi y_1 + \psi y_2 + \chi y_3 = 0$$

associe à chaque point y une courbe du $m^{\text{ième}}$ ordre et à chaque point x une ligne droite. On peut alors, par analogie avec la steinérienne, indiquer un lieu des points y auxquels correspondent des courbes à point double, et aux points doubles de ce lieu correspondront des courbes à deux points doubles, de même que dans un réseau de premières polaires (p. 87). On peut d'ailleurs considérer en général des systèmes de courbes représentés par une équation homogène, soit par rapport aux y, soit par rapport aux x, et des ordres m et n par rapport aux x et aux y respectivement :

$$f(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0.$$

Alors, à chaque point x correspond une courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre, à chaque point y une courbe du $m^{\text{ième}}$ ordre. Nous mentionnerons seulement encore un théorème relatif à ces systèmes (¹), qui doit être considéré comme une extension aux formes ternaires du principe de correspondance de M. Chasles (p. 261) et qui peut souvent être utile dans certaines supputations, de même que ce dernier.

(¹) *Voir* Salmon, *Geometry of three dimensions*, seconde édit., 1865, p. 511, ou p. 556 dans la seconde Partie de la traduction allemande de Fiedler. Leipzig, 1874.

Étant donnés deux systèmes de courbes de l'espèce citée,

$$f(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(\overset{m'}{x}, \overset{n'}{y}) = 0,$$

à chaque point x du plan correspondent $\alpha' = nn'$ points y qui sont les intersections des deux courbes, mises en relation avec ce point par $f = 0$ et $\varphi = 0$; de même à chaque point y du plan correspondent $\alpha = mm'$ points x : on demande quels sont les points x qui coïncident avec leurs points correspondants y. En posant $x = y$ dans les équations $f = 0$, $\varphi = 0$, nous obtiendrons les points cherchés (*points de coïncidence*) comme intersections des deux courbes

$$f(\overset{m}{x}, \overset{n}{x}) = 0, \quad \varphi(\overset{m'}{x}, \overset{n'}{x}) = 0;$$

leur nombre est donc égal à

$$(m + n)(m' + n') = mm' + nn' + mn' + nm' = \alpha + \alpha' + \beta,$$

si l'on pose $\beta = mn' + nm'$. Le nombre β est ici égal à l'ordre de la courbe que décrit un point y si x avance sur une droite. On obtient en effet l'équation de cette courbe si dans $f = 0$, $\varphi = 0$ on pose

$$x_i = z_i + \lambda t_i$$

et qu'on élimine λ; le résultat de l'élimination est alors précisément de l'ordre $mn' + nm'$ en y. La courbe parcourue par x lorsque y décrit une droite est naturellement du même ordre.

Si l'on donne du nombre β cette définition géométrique, notre théorème sur le nombre $\alpha + \alpha' + \beta$ est encore vrai, même lorsque les α ou α' points ne sont pas représentables comme le système complet des points d'intersection de deux courbes, ce qui arrive toujours nécessairement au cas où α et α' désignent des nombres premiers. Mais nous pouvons énoncer le théorème d'une manière encore plus générale si nous supposons que pour *tous* les points d'une courbe déterminée une coïncidence ait lieu. Nous rechercherons alors le nombre des points de coïncidence de la correspondance non situés sur la *courbe de coïncidence* (¹).

(¹) Cette extension du théorème a été donnée par M. ZEUTHEN, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, juin 1874. Au cas où la correspondance est représentable par deux équations $f = 0$, $\varphi = 0$, une courbe de coïncidence prendra naissance lorsque, en posant $x = y$, un seul et même facteur se séparera de f et de φ.

Nous admettons donc qu'à un point x correspondent α' points y, qu'à un point y correspondent α points x; soit d'ailleurs β l'ordre de la courbe que parcourent les points y homologues de x lorsque x décrit une droite. Nous pouvons énoncer cette dernière supposition en disant que sur une droite quelconque il doit exister β couples de points tels qu'un de leurs points se trouve compris dans le groupe des points homologues de l'autre. Sous cette forme, β dépend symétriquement des groupes de points x et y; *β est donc en même temps l'ordre de la courbe que décrivent les points x homologues de y lorsque y avance sur une droite.* Nous désignerons enfin par γ l'ordre de *la courbe de coïncidence,* dont tous les points sont par définition des points de coïncidence, et par δ la classe de la courbe dont les tangentes joignent un point x de la courbe de coïncidence au point homologue y, qui en est infiniment voisin.

Nous déterminerons d'abord l'ordre d'une courbe K_x qui sera parcourue par un point x, si la ligne qui joint ce point à l'un de ses α' points homologues y passe par un point fixe O. Joignons dans ce but O aux points x d'une droite quelconque w par des rayons u. A tout rayon u correspondent α' rayons v joignant O aux α' points y homologues du point d'intersection x de u et de w. A toute ligne v correspondent d'autre part β rayons u, à savoir les lignes de jonction de O avec les points d'intersection de la ligne w et de la courbe d'ordre β décrite par les points x, lorsque y parcourt le rayon v.

Maintenant, d'après le principe de correspondance de Chasles (t. I, p. 261), il arrivera $(\alpha' + \beta)$ fois qu'une ligne u coïncide avec une ligne homologue v. Parmi ces rayons de coïncidence, il en est toutefois γ que nous devons exclure : ce sont les lignes de jonction de O avec les γ points d'intersection de la ligne w et de la courbe de coïncidence, car à toute ligne semblable envisagée comme rayon u correspond, par suite de la définition de la courbe de coïncidence, un rayon infiniment voisin v. Il existe donc sur w $\alpha' + \beta - \gamma$ points dont les lignes de jonction avec un des points homologues y passent par O ; autrement dit, l'ordre cherché de la courbe K_x est égal à $\alpha' + \beta - \gamma$. Semblablement, le lieu des points y dont les lignes de jonction avec un point homologue x passent par O est une courbe K_y de l'ordre $\alpha + \beta - \gamma$.

Prenons ensuite un second point fixe P, et joignons-le aux points homologues entre eux x et y qui sont situés par couples sur une droite passant par O au moyen des lignes u' et v' respectivement. Chaque ligne u' coupe la courbe K_x qui appartient à O en $\alpha' + \beta - \gamma$ points x; à chacun de ces derniers répond un point y dont la ligne de jonction avec lui passe par O; donc à toute ligne u' correspondent $\alpha' + \beta - \gamma$ lignes v', et à toute ligne v' correspondent d'une manière analogue $\alpha + \beta - \gamma$ lignes u'. Par suite, entre ces deux rayons ont lieu $\alpha + \alpha' + 2\beta - 2\gamma$ coïncidences. Mais, parmi ces derniers rayons de coïncidence, $\beta - \gamma$ se perdent dans la ligne de jonction de O et de P, car cette droite renferme, comme toute autre droite quelconque, β couples de points homologues x et y, parmi lesquels γ coïncident avec les points d'intersection de w et de la courbe de coïncidence. Les $\alpha + \alpha' + \beta - \gamma$ coïncidences restantes donnent, par suite de notre construction, les lignes de jonction de P avec les points de coïncidence de la correspondance originaire dans le plan. Mais parmi elles sont encore comprises les δ lignes de jonction de P avec les δ points de la courbe de coïncidence tels que les tangentes à l'enveloppe définie plus haut qui leur appartiennent passent par O. Il existe donc finalement

$$\alpha + \alpha' + \beta - \gamma - \delta$$

points situés à part qui coïncident avec leurs homologues. Nous avons par suite ce théorème :

Soit donnée dans un plan une correspondance en vertu de laquelle à tout point x répondent α' points y et à tout point y α points x; soit β l'ordre du lieu des points x ou y qui correspondent aux points d'une droite quelconque; supposons ensuite que la correspondance ait une courbe de coïncidence *de l'ordre γ et que l'enveloppe des lignes joignant les points de cette courbe avec leurs points homologues infiniment voisins soit de la classe δ* [1]. *Alors il existe dans le plan*

$$\alpha + \alpha' + \beta - \gamma - \delta\ \cdot$$

---

[1] Si pour la relation des deux courbes voisines d'ordre γ il n'y a pas de points exceptionnels particuliers, on a $\delta = 2\gamma$ (*voir* p. 105).

points où deux points homologues x et y se confondent (points de coïncidence).

Comme application nous donnerons la démonstration de la proposition suivante :

Il existe en général

$$(n-1)^2+(n-1)(n'-1)+(n'-1)^2$$

points dont les polaires linéaires par rapport à une courbe du $n^{ième}$ ordre et par rapport à une autre du $n'^{ième}$ ordre se confondent.

Soient en effet $f=a_x^n=0$, $\varphi=a_x'^{n'}=0$ les deux courbes; à la polaire linéaire d'un point x relativement à $f=0$ répondent $(n'-1)^2$ points x' dont cette droite est la polaire linéaire relativement à $\varphi=0$; nous avons par conséquent $\alpha'=(n'-1)^2$, et de même $\alpha=(n-1)^2$. Pour la détermination de β, observons que la polaire linéaire d'un point x relativement à $f=0$ enveloppe une courbe de la $(n-1)^{ième}$ classe si x parcourt une droite (p. 83). Toute tangente de cette courbe est encore la $(n'-1)^{ième}$ polaire de $(n'-1)^2$ points x' relativement à $\varphi=0$, et tous ces points x' forment alors une courbe de l'ordre $(n-1)(n'-1)$. Cette dernière assertion résulte du théorème général que voici :

Si une droite enveloppe une courbe de $\mu^{ième}$ classe $u_\alpha^\mu=0$, les $(m-1)^2$ pôles de cette droite relativement à une courbe $a_x^m=0$ enveloppent une courbe de l'ordre $\mu(m-1)$. On obtient d'ailleurs immédiatement l'équation de cette dernière en substituant dans u_α^μ aux quantités u_i les valeurs $a_i a_x^{m-1}$.

Nous avons donc, dans notre cas, à prendre $\beta=(n-1)(n'-1)$, et, par conséquent (puisque $\gamma=\delta=0$), le nombre des points cherchés est en fait égal à

$$\alpha+\alpha'+\beta=(n-1)^2+(n-1)(n'-1)+(n'-1)^2.$$

Dans ce cas, nous aurions pu aussi obtenir algébriquement par voie directe le nombre trouvé. Si l'on pose en effet $f_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\varphi_i=\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$, on a nécessairement pour les points de coïncidence x les équations suivantes :

$$f_1:f_2:f_3=\varphi_1:\varphi_2:\varphi_3$$

ou

$$f_1\varphi_2 - \varphi_1 f_2 = 0,$$
$$f_2\varphi_3 - \varphi_2 f_3 = 0,$$
$$f_3\varphi_1 - \varphi_3 f_1 = 0.$$

Les deux premières sont de l'ordre $n-1+n'-1$; elles ont en conséquence $(n-1+n'-1)^2$ solutions communes. Mais parmi ces solutions se trouvent compris les $(n-1)(n'-1)$ points d'intersection de $\varphi_2 = 0$, $f_2 = 0$ par lesquels ne passe pas la courbe $f_3\varphi_1 - \varphi_3 f_1$. Le nombre des solutions communes à la fois aux trois équations est donc égal à

$$(n-1+n'-1)^2 - (n-1)(n'-1) = (n-1)^2 + (n'-1)^2 + (n-1)(n'-1),$$

comme nous l'avons trouvé précédemment [1].

Pour le cas de $n = n'$, les $3(n-1)^2$ points de coïncidence du résultat ne diffèrent pas des points doubles qui se rencontrent dans le faisceau $f + \lambda\varphi = 0$, car les conditions relatives à un point de cette espèce,

$$f_i + \lambda\varphi_i = 0,$$

peuvent, après élimination de λ, s'écrire précisément sous la forme

$$f_1 : f_2 : f_3 = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3.$$

VI. — Continuation. — La méthode des caractéristiques.

Dans ces derniers temps, on a étudié avec plus de détails les systèmes de courbes qui dépendent d'un paramètre arbitraire, et ces considérations ont, particulièrement en ce qui concerne la conception exacte des dégénérations des courbes algébriques, conduit à des résultats importants.

Nous devons, toutefois, nous contenter de signaler dans ce qui suit les points de vue à poursuivre; ce n'est que sur les systèmes de coniques que nous nous arrêterons un peu plus longtemps. Nous rencontrons ici une partie de la Géométrie qui, à l'époque contemporaine, s'est élevée au rang d'une doctrine de plus en plus

---

(1) *Voir*, sur de semblables systèmes d'équations, SALMON-FIEDLER, *Raumgeometrie*, II, p. 519 et suiv. dans la deuxième édit., 1874.

complète, et qui, par suite, est désignée avec raison sous le nom de *Géométrie du Nombre*.

Un tel système de courbes en nombre simplement infini peut se représenter algébriquement de la manière suivante. Les coefficients de la courbe mobile de l'ensemble ($f = 0$) sont des fonctions algébriques non nécessairement rationnelles d'un paramètre λ. Si cette dépendance est irrationnelle, on peut toujours, comme l'apprend la théorie des fonctions algébriques, exprimer les coefficients *rationnellement* au moyen de *deux* paramètres entre lesquels existe une équation algébrique, ou, si nous introduisons encore un facteur d'homogénéité, comme des fonctions homogènes entières de λ_1, λ_2, λ_3, ces dernières quantités étant liées par une équation homogène.

Relativement au système de courbes, deux nombres ont une importance particulière et sont appelés les *caractéristiques du système*, savoir :

μ le nombre des courbes du système qui passent par un point fixe quelconque;

ν le nombre des courbes du système qui touchent une droite fixe donnée [1].

Le nombre μ, lorsque les coefficients de la courbe mobile sont des fonctions rationnelles d'un paramètre, se confond avec la dimension à laquelle entre ce dernier dans l'équation ponctuelle $f = 0$ du système. Le nombre ν donnera alors en général la dimension à laquelle entre ce paramètre dans l'équation $\varphi = 0$ du système en coordonnées lignes; donc dans les courbes d'ordre n il sera égal à $2\mu(n-1)$, puisque φ est du degré $2(n-1)$ par rapport aux coefficients de f [2]. Il peut néanmoins arriver, et, dans ce

(1) Ces caractéristiques ont d'abord été introduites par M. Chasles, à qui l'on doit en général la création de la *théorie des caractéristiques*. Cette théorie a été ensuite développée par MM. de Jonquières, Cayley, Salmon, Zeuthen. *Voir* surtout le travail d'ensemble de CAYLEY, *On the curves which satisfy given conditions* (*Philos. Transactions*, London, 1868, t. CLVIII), puis SALMON, *Higher plane curves*, et CREMONA, *Einleitung in die Theorie der algebraischen Curven*. On trouvera des indications bibliographiques plus complètes dans Cayley (*loc. cit.*) et dans PAINVIN, *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. III, p. 155.

(2) C'est à ces hypothèses que se rapportent les premières recherches de M. de Jonquières.

qui suit, nous présupposerons en général l'existence de faits semblables, que dans le système soient comprises des courbes qui touchent une droite quelconque; c'est ce qui a lieu lorsque, par exemple, une courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre se décompose en une courbe du $(n-2)^{\text{ième}}$ ordre et en une droite comptant doublement, ou en général lorsqu'elle renferme une branche comptée plusieurs fois. Toutes les courbes de cette espèce qui satisfont identiquement à l'équation $\varphi = 0$ seront englobées dans le nombre $2\mu(n-1)$, tandis que dans le nombre ν nous n'avons l'intention de comprendre que les courbes qui ont un contact *proprement dit*. De même μ doit indiquer seulement le nombre des courbes qui passent par un point dans le sens propre, sans égard à celles qui renferment un point comptant double et qui ainsi, en un certain sens, passent par un point quelconque : courbes qui, à vrai dire, ne sont complétement représentables que par une équation en coordonnées lignes.

Ce sont précisément ces éventualités qui rendent nécessaire, pour les recherches algébriques, d'avoir toujours simultanément sous les yeux les équations $f = 0$ et $\varphi = 0$. Les *courbes singulières* dont nous avons parlé, à branches comptant plusieurs fois, apparaissent dans les recherches géométriques lorsqu'on fait dégénérer successivement une courbe générale (¹). Si l'on part de la conception ponctuelle, et qu'on réunisse par exemple un point double à des points doubles existant déjà ou qu'on transforme un point double en un point de rebroussement, cette réduction est représentée dans la conception linéaire par la circonstance qu'un point particulier situé sur la courbe vient à s'en distinguer de manière à compter éventuellement plusieurs fois. Nous désignerons un point semblable, où la courbe dont il s'agit doit être regardée comme touchée par toute courbe qui y passe, par le nom de *sommet* (²). Des droites comptant éventuellement plusieurs fois peuvent de même se séparer d'une courbe, tandis que dans la conception linéaire elles restent inaperçues; nous les désignerons sous le nom de *branches droites*.

(¹) *Voir* des exemples du fait p. 55 et 59.

(²) Il n'est pas nécessaire qu'un sommet soit situé en un point multiple, comme dans l'exemple; il peut aussi être situé d'une manière quelconque sur une branche de la courbe comptant plusieurs fois.

Ces décompositions montrent que, pour la détermination des nombres μ, ν d'un système, il est nécessaire avant toutes choses de connaître complétement les courbes singulières du système, et c'est dans la détermination de ces dernières, et surtout dans la détermination de l'ordre de multiplicité des branches droites et des sommets, que se trouve la principale difficulté du problème.

Nous expliquerons d'abord ces circonstances par rapport aux *systèmes de coniques*. Dans un tel système, les courbes suivantes sont possibles :

1° Dans la conception ponctuelle :

Le *couple de lignes*, dont le point double est alors un sommet;

La *ligne double*, qui est elle-même une branche droite, et sur laquelle sont situés deux sommets séparés.

2° Dans la conception linéaire :

Le *couple de points*, dont la ligne de jonction est une branche droite;

Le *point double*, qui est lui-même un sommet par lequel passent deux branches droites séparées.

3° Dans les deux points de vue simultanément :

La *droite*, avec un seul point situé sur cette droite.

Nous déterminerons d'abord le nombre λ des lignes droites, π des points doubles.

Par tout point d'une droite quelconque passent μ courbes du système, dont chacune coupe encore la droite en un point y; de même, à tout point y correspondent μ points x sur la droite : nous avons par suite 2μ coïncidences. Celles-ci sont produites ou bien par le contact de la droite avec une conique proprement dite, ou bien par sa rencontre avec une ligne double; mais il y a ν coniques proprement dites tangentes à une droite quelconque, et nous avons en conséquence

$$(1) \qquad \begin{cases} \lambda = 2\mu - \nu, \\ \pi = 2\nu - \mu. \end{cases}$$

Au moyen de ces équations on peut, si l'on n'y arrive pas directement, déterminer les caractéristiques μ, ν d'un système par les

nombres λ, π, lorsque l'on connaît ces derniers, et c'est à ces déterminations que se rapportent spécialement les recherches de M. Zeuthen. Les nombres en question s'obtiendront encore d'une manière simple pour les systèmes donnés par ce qu'on appelle des *conditions élémentaires*, c'est-à-dire si l'on demande que les coniques passent par quatre points donnés ou passent par trois points et touchent une droite, etc. : systèmes que nous désignerons brièvement par les symboles

(∷), (∴|), (‥||), (·|||), (||||).

Nous réunissons dans le Tableau suivant les valeurs obtenues pour μ, ν, λ, π :

(2)

<table>
<tr><th></th><th>μ</th><th>ν</th><th>λ</th><th>π</th></tr>
<tr><td>(∷)</td><td>1</td><td>2</td><td>0</td><td>3</td></tr>
<tr><td>(∴|)</td><td>2</td><td>4</td><td>0</td><td>6</td></tr>
<tr><td>(‥||)</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td></tr>
<tr><td>(·|||)</td><td>4</td><td>2</td><td>6</td><td>0</td></tr>
<tr><td>(||||)</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td><td>0</td></tr>
</table>

Les systèmes (∷) et (||||) ont déjà été traités en détail dans la théorie des coniques. En ce qui concerne la représentation analytique du système (∴|), nous observerons ce qui suit. Prenons les trois points fixes pour sommets du triangle des coordonnées; l'équation d'une conique passant par ces points est alors

$$a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 + a_{12}x_1x_2 = 0.$$

Soient ensuite u_i les coordonnées de la tangente fixe; nous avons encore la condition

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Mais le développement de ce déterminant donne précisément le produit des quatre valeurs que prend l'expression

$$\sqrt{a_{23}u_1} \pm \sqrt{a_{31}u_2} \pm \sqrt{a_{12}u_3}$$

suivant les signes employés. Si donc nous posons

$$a_{23}u_1 = \lambda_1^2, \quad a_{31}u_2 = \lambda_2^2, \quad a_{12}u_3 = \lambda_3^2,$$

l'*équation du système* (.*.|) sera

$$(3) \qquad \frac{\lambda_1^2}{u_1}x_2x_3 + \frac{\lambda_2^2}{u_2}x_3x_1 + \frac{\lambda_3^2}{u_3}x_1x_2 = 0,$$

avec

$$(4) \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0.$$

Les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ entrant ici au second degré, on a $\mu = 2$.

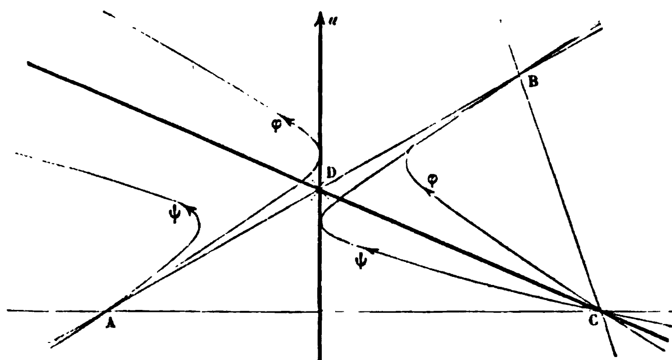
Dans le système sont compris trois couples de lignes donnés par l'évanouissement du déterminant. Comme celui-ci, c'est-à-dire $2\frac{\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2}{u_1u_2u_3}$, est un carré parfait, chaque couple compte deux fois, et il en est de même de chacun des trois sommets; donc le nombre π du Tableau est égal à 6. Ces sommets sont les points d'intersection des trois côtés du triangle avec la droite fixe; chaque côté, en y adjoignant la ligne qui joint le sommet situé sur ce côté au point de rencontre des deux côtés adjacents, forme une courbe du système. Il n'y a pas ici de lignes doubles; on a donc $\nu = 4$ et $\lambda = 0$, et, en effet, aucun facteur ne se sépare dans la formation de l'équation en coordonnées lignes.

On peut aussi se rendre compte, par voie purement géométrique et ainsi qu'il suit, de cette circonstance que les trois couples de lignes doivent être comptés deux fois comme coniques du système. Nous rechercherons d'abord comment dans un système linéaire de courbes une conique dégénère insensiblement en un couple de lignes ou en un couple de points. Dans un faisceau, nous devons évidemment considérer un couple de lignes comme provenant de ce que, dans l'un des espaces angulaires du couple en question, les branches d'une hyperbole se rapprochent de plus en plus de la forme d'un système de deux droites, pour ensuite, en continuant leur mouvement et après avoir atteint cètte position limite, s'en éloigner de nouveau dans l'autre espace angulaire.

Le couple de lignes n'est évidemment parcouru qu'une fois dans cette circonstance; il ne compte donc qu'une fois. Les choses se passent d'une manière analogue pour le couple de points dans un système de coniques à quatre tangentes communes, par exemple un système confocal; une ellipse s'amincit de plus en plus autour des points du couple jusqu'à ce qu'enfin elle recouvre deux fois la portion intérieure de leur ligne de jonction; alors, comme figure ligne, elle est représentée précisément par les deux points (sommets). Si nous passons à la courbe immédiatement voisine, ce sera une hyperbole étroitement appliquée sur les deux parties de la droite qui à partir des deux points tendent vers l'infini et recouvrent ainsi doublement cette portion. Dans le passage successif à d'autres courbes, les branches des hyperboles font un angle de plus en plus grand avec la ligne double dont il vient d'être parlé. Le couple de points doit être évidemment compté une seule fois; il forme une position de passage simple des courbes du système.

Il en est autrement du système $({}_{*}{}^{*}{}_{*}|)$, dont nous nous occupons actuellement, et qui est représenté en abrégé dans la *fig.* 20. Ici

Fig. 20.



A, B, C sont les trois points fixes, u est la tangente fixe. De l'un des couples cités (ayant D pour sommet) s'approche l'hyperbole φ dont une branche touche la ligne u, tandis que l'autre en arrive infiniment près de l'autre côté. Lorsque le couple de lignes est atteint, l'hyperbole avec ses branches ne passe pas dans les espaces

angulaires voisins, mais revient en arrière en prenant dans la figure la position de la courbe ψ; elle se comporte d'une certaine manière dans le système de courbes comme un point de rebroussement sur une courbe algébrique, et il est visible qu'elle doit être comptée deux fois comme courbe du système.

Pour la représentation du système dualistique à lui-même (** ||), prenons le point d'intersection des deux droites comme sommet $u_1 = 0$ du triangle des coordonnées et la ligne de jonction des deux points comme côté $x_1 = 0$. Déterminons les autres éléments du triangle de telle sorte que les deux points donnés soient harmoniques aux points $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, et qu'en même temps les droites données soient harmoniques à $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. L'équation de la conique a alors la forme

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0,$$

$a_{22} : a_{33} = c$ étant une constante. De même, dans l'équation en coordonnées lignes, la quantité

$$\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}a_{33} - a_{13}^2} = c'$$

doit être nécessairement constante et le terme en $u_2 u_3$ manquer, ce qui donne la condition

$$a_{12}a_{13} = 0.$$

Chacune des hypothèses $a_{12} = 0$, $a_{13} = 0$ satisfait donc aux conditions posées, et nous avons ce théorème :

Le système de coniques à deux points fixes et deux tangentes fixes est réductible, c'est-à-dire se décompose en deux systèmes complètement séparés (¹).

En posant par exemple $a_{12} = 0$ et

$$\lambda_1 = a_{11}, \quad \lambda_2 = a_{22} = ca_{33}, \quad \lambda_3 = a_{13},$$

l'*équation de l'un des systèmes* devient

$$(5) \qquad \lambda_1 x_1^2 + \frac{1}{c}\lambda_2(cx_2^2 + x_3^2) + 2\lambda_3 x_1 x_3 = 0,$$

(¹) Cela est évident si l'on fait coïncider les deux points fixes avec les points circulaires. Les cercles de l'un des systèmes sont alors situés dans l'un des espaces angulaires compris entre les deux tangentes fixes, ceux de l'autre système dans l'autre espace angulaire.

avec la condition

$$(6) \qquad \lambda_1 \lambda_2 (c - c') + cc' \lambda_3^2 = 0.$$

Donc, par tout point passent deux coniques; il en est de même dans le système $a_{13} = 0$: on a par conséquent ici $\mu = 4$, et en vertu du principe de dualité aussi $\nu = 4$. De là résulte ensuite, à cause de (1), $\lambda = \pi = 4$. En effet, pour des coniques évanouissantes, le discriminant

$$\lambda_1 \lambda_2^2 - c\lambda_3^2 \lambda_2 = 0$$

est nécessairement nul. On a donc

$$\text{ou bien} \quad \lambda_2 = 0, \qquad \text{ou bien} \quad \lambda_1 \lambda_2 - c\lambda_3^2 = 0.$$

Dans le premier cas, en vertu de l'équation de condition (6), on a aussi $\lambda_3 = 0$. Dans le second, (6) se transforme en $\lambda_1 \lambda_2 = 0$, de sorte qu'on a ou bien $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 0$, ce qui est le cas précédent, ou bien $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_3 = 0$. Ces dernières conditions donnent le couple de lignes $cx_2^2 + x_3^2 = 0$, lequel est formé des lignes joignant les deux points fixes au point d'intersection des deux tangentes fixes. Les équations $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, au contraire, conduisent à la *ligne double* $x_1^2 = 0$, qui est la ligne de jonction des deux points fixes. Cette dernière compte deux fois dans chacun des deux systèmes, et par conséquent quatre fois en tout (d'où $\lambda = 4$), car pour $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, non-seulement le discriminant $\lambda_1 \lambda_2^2 - c\lambda_3^2 \lambda_2$ s'évanouit, mais encore les dérivées partielles de celui-ci par rapport à $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont individuellement nulles. Il existe de même un sommet comptant quadruplement (d'où $\pi = 4$), savoir le point de rencontre des deux droites données.

Nous pouvons nous rendre compte de la multiplicité des courbes singulières par des considérations géométriques semblables à celles présentées à propos du système (${}_*{}^*{}_*|$). Dans les *fig.* 21_a et 22_a, deux coniques appartenant à chacun des deux systèmes en lesquels se décompose le système (${}_{**}||$) ont été représentées un peu avant et un peu après la position limite qui est indiquée par la ligne double $\overline{AB}$. Les deux systèmes se distinguent, comme on voit, en ce que dans l'un les courbes se coupent toujours en quatre points réels, tandis que dans l'autre il n'en est pas toujours ainsi. La circonstance que l'ellipse devenue

infiniment aplatie ne s'étend point de la manière représentée plus haut (p. 119), de manière à devenir une hyperbole, mais se transforme immédiatement en l'ellipse infiniment voisine sans que

Fig. 21_a.

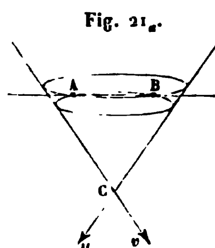
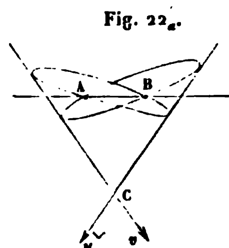


Fig. 22_a.



les branches infinies de la ligne double soient recouvertes par une hyperbole infiniment aplatie, indique ici que la ligne double doit compter deux fois; elle se comporte précisément comme un point de rebroussement d'une courbe algébrique. C'est d'une manière tout à fait analogue sous le rapport de la dualité qu'a lieu, dans les deux systèmes, le rapprochement successif vers le point d'intersection C des deux droites données u, v, ce qui est visible sur

Fig. 21_b.

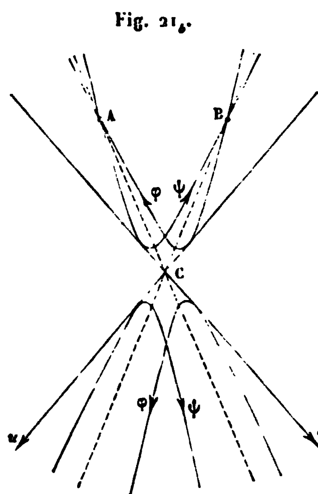
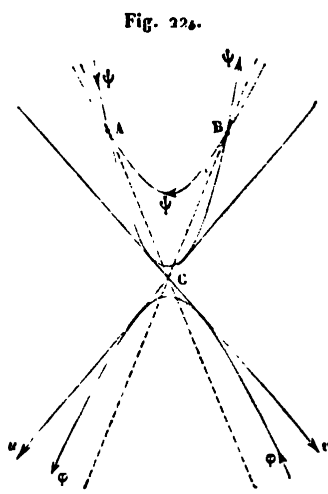


Fig. 22_b.



les *fig.* 21_b et 22_b. Les tangentes des hyperboles aux points A, B se rapprochent toujours de plus en plus des lignes AC, BC, corréla-

tivement à la circonstance que dans les premières figures les points de contact des ellipses tendent de plus en plus vers les points d'intersection de la ligne double avec u et v [1].

Comme dégénération du cas considéré en dernier lieu, on peut considérer le système linéaire de coniques dont quatre points de base sont infiniment voisins. On a pour ce système $\mu = \nu = 1$. Son équation a été précédemment établie en coordonnées points (t. I, p. 175) sous la forme

$$y_1^2 + \lambda(\alpha y_2^2 + \beta y_1 y_2 + \gamma y_1 y_3) = 0.$$

Si l'on pose $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $\beta y_2 + \gamma y_3 = 2x_3$, elle devient

$$(7) \qquad x_1^2 + \lambda(\alpha x_2^2 + 2x_1 x_3) = 0.$$

Comme courbe singulière se présente la tangente commune $x_1 = 0$, qui répond au paramètre $\lambda = 0$; en effet, le discriminant est égal à $-\lambda^3\alpha$. L'équation en coordonnées lignes devient, après séparation d'un facteur λ,

$$u_3^2\alpha - \lambda(u_2^2 + 2\alpha u_1 u_3) = 0.$$

Elle donne pour $\lambda = 0$, comme courbe singulière, le point $u_3 = 0$, qui est situé sur $x_1 = 0$. Nous avons donc là une courbe singulière de l'espèce comprise sous le n° 3.

Les caractéristiques μ, ν d'un système de coniques ont pour ce système une importance considérable. M. Chasles a en effet observé que, dans un grand nombre de cas, le nombre des coniques d'un système (μ, ν) qui satisfont à une cinquième condition est de la forme $\alpha\mu + \beta\nu$, les nombres α, β dépendant uniquement de la nature de la condition et non du système de coniques. D'après cette observation, de nombreuses recherches ont été entreprises sur les coniques, principalement à l'aide du principe de correspondance de M. Chasles. M. Halphen a d'ailleurs montré [2] que le

---

[1] Nos développements géométriques ne décident, à proprement parler, que la question de savoir si la multiplicité des courbes en question est donnée par un nombre pair ou par un nombre impair.

[2] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 4 septembre et 13 novembre 1876. M. Halphen arrive au théorème général qui suit :

Pour que le nombre des coniques satisfaisant à une condition Φ *et faisant partie d'un système quelconque* (μ, ν) *soit égal à* $\alpha\mu + \beta\nu$ *(*α *et* β *étant des nombres ne dé-*

théorème cité sur le nombre $\alpha\mu + \beta\nu$ n'est pas exact dans tous les cas et qu'au contraire il peut souffrir des exceptions lorsque le système (μ, ν) admet des dégénérations de l'espèce mentionnée sous le n° 3. C'est ce que nous allons montrer dans ce qui suit par un exemple.

Supposons que l'équation du système dont il s'agit soit représentée par $a_x^2 = 0$. Soient deux points quelconques y, z et deux droites quelconques v, w. On recherche les courbes du système qui rencontrent la ligne joignant y et z de telle manière que le rapport anharmonique des points d'intersection et des points y, z soit égal au rapport anharmonique déterminé par les lignes v, w et par les deux tangentes des courbes en question, comprises dans le faisceau $u + \lambda w$. Le rapport anharmonique α de ces quatre points se calcule au moyen de l'équation (t. I, p. 95)

$$PR(\alpha + 1)^2 - 4\alpha Q^2 = 0,$$

dans laquelle $P = a_y^2$, $R = a_z^2$, $Q = a_y a_z$, et le rapport anharmonique β des quatre droites au moyen de

$$GL(\beta + 1)^2 - 4\beta H^2 = 0,$$

relation où l'on a

$$G = (abv)^2, \quad L = (abw)^2, \quad H = (abv)(abw).$$

Les deux rapports anharmoniques devant être égaux, il en résulte

$$(8) \qquad GLQ^2 = PRH^2.$$

C'est là la cinquième condition à remplir, qui est imposée aux courbes du système $a_x^2 = 0$.

Soit maintenant, en particulier, $a_x^2 = 0$ un ensemble linéaire de coniques ayant deux points de contact communs de telle sorte que

$$a_x^2 = x_1^2 + 2\lambda x_2 x_3, \quad (abu)^2 = -2\lambda(\lambda u_1^2 + 2u_2 u_3).$$

---

pendant que de la condition Φ), il faut et il suffit que le nombre des coniques satisfaisant à la condition Φ et ayant en un point donné des contacts du troisième ordre avec une courbe donnée soit égal à $\alpha + \beta$.

Sur la signification algébrique des nombres α et β dans les cas où s'applique le théorème de M. Chasles, *voir* Clebsch, *Zur Theorie der Charakteristiken* (*Math. Annalen*, t. VI).

L'équation (8), après séparation du facteur λ^2, se transforme alors en

$$(\lambda v_1^2 + 2v_2v_3)(\lambda w_1^2 + 2w_2w_3)(y_1z_1 + \lambda y_2z_3 + \lambda y_3z_2)^2$$
$$= (y_1^2 + 2\lambda y_2y_3)(z_1^2 + 2\lambda z_2z_3)(\lambda v_1w_1 + v_2w_3 + v_3w_2)^2.$$

Nous avons par suite une équation du quatrième degré, et nous aurions $\alpha\mu + \beta\nu = \alpha + \beta = 4$. Si donc le théorème sur le nombre $\alpha\mu + \beta\nu$ était vrai d'une manière générale, il faudrait que dans tout système $(1, 1)$ le nombre des coniques qui satisfont à la condition (8) fût égal à $\alpha + \beta$, c'est-à-dire égal à 4; or il n'en est pas ainsi, comme il résulte de ce qui suit.

Toutes les coniques du système $a_x^2 = 0$ peuvent avoir entre elles, au point $(x_1 = 0, x_2 = 0)$, un contact du troisième ordre. On a alors, d'après (7),

$$a_x^2 = x_1^2 + \lambda(x_2^2 + 2x_1x_3), \quad (abu)^2 = -2\lambda(u_3^2 - \lambda u_2^2 - 2\lambda u_1u_3).$$

L'équation (8), après suppression du facteur λ^2, devient

$$(y_1^2 + \lambda y_2^2 + 2\lambda y_1y_3)(z_1^2 + \lambda z_2^2 + 2\lambda z_1z_3)(v_3w_3 - \lambda v_2w_2 - \lambda v_1w_3 - \lambda v_3w_1)^2$$
$$= (v_3^2 - \lambda v_2^2 - 2\lambda v_1v_3)(w_3^2 - \lambda w_2^2 - 2\lambda w_1w_3)(y_1z_1 + \lambda y_2z_2 + \lambda y_1z_3 + \lambda y_3z_1)^2.$$

On peut encore une fois en séparer le facteur λ, car le seul terme non multiplié par λ, savoir $y_1^2\, z_1^2\, v_3^2\, w_3^2$, est le même dans les deux membres. Le nombre des solutions est donc égal à 3 et non à 4. *Par conséquent, l'observation de M. Chasles n'est pas applicable à tous les systèmes de coniques.*

D'un autre côté, cette observation conduit toujours à d'importants résultats lorsqu'il s'agit de trouver le nombre des coniques d'un système qui touchent une courbe fixe donnée d'ordre n et de classe k; on a alors $\alpha = k$, $\beta = n$, et le nombre cherché est par suite égal à $k\mu + n\nu$. Le théorème dont il s'agit est vrai non-seulement pour les systèmes de coniques, mais aussi pour les systèmes de courbes d'ordre quelconque, μ de ces courbes passant par un point quelconque et ν touchant une droite quelconque. Nous allons en donner incessamment la démonstration. En supposant provisoirement la proposition vraie, nous pouvons facilement trouver le nombre Z des coniques qui touchent cinq courbes données C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, dont les ordres sont respectivement

n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 et les classes k_1, k_2, k_3, k_4, k_5. Si μ, ν sont les caractéristiques du système de coniques tangentes aux courbes C_2, C_3, C_4, C_5, on aura $Z = k_1\mu + n_1\nu$, μ, ν ne dépendant pas de k_1, μ_1. Mais, comme Z est composé symétriquement avec les nombres k_i, n_i, il en résulte, p, q, r, s, t, u désignant des grandeurs purement numériques,

$$Z = pk_1k_2k_3k_4k_5 + q\Sigma k_1k_2k_3k_4n_5 + r\Sigma k_1k_2k_3n_4n_5 + s\Sigma k_1k_2n_3n_4n_5 + t\Sigma k_1n_2n_3n_4n_5 + u.n_1n_2n_3n_4n_5,$$

les signes sommatoires indiquant qu'il faut former avec les éléments qu'ils concernent des fonctions symétriques en permutant les indices. Pour la détermination des facteurs numériques qui interviennent, nous considérerons des cas particuliers. Si par exemple une conique doit passer par cinq points, on a

$$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = 0,$$
$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = 1,$$

d'où

$$Z = p = 1.$$

Il existe en second lieu deux coniques, passant par quatre points fixes et tangentes à une droite fixe. Ici l'on a

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1, \quad k_5 = 0,$$
$$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 0, \quad n_5 = 1,$$

d'où

$$Z = q = 2.$$

Enfin il existe quatre coniques passant par trois points fixes et tangentes à deux droites fixes. On a, dans ce cas,

$$k_1 = k_2 = k_3 = 1, \quad k_4 = k_5 = 0,$$
$$n_1 = n_2 = n_3 = 0, \quad n_4 = n_5 = 1,$$

d'où

$$Z = r = 4.$$

En vertu du caractère dualistique des nombres k_i, n_i, les nombres p, q, r doivent nécessairement se confondre respectivement avec u,

t, s; nous avons par suite

$$s = 4, \quad t = 2, \quad u = 1,$$

d'où ce théorème :

Le nombre des coniques qui touchent cinq courbes appartenant respectivement aux ordres n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 et aux classes k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 est égal à

$$\begin{aligned} &k_1k_2k_3k_4k_5 + 2\Sigma k_1k_2k_3k_4n_5 + 4\Sigma k_1k_2k_3n_4n_5 \\ &\quad + 4\Sigma k_1k_2n_3n_4n_5 + 2\Sigma k_1n_2n_3n_4n_5 + n_1n_2n_3n_4n_5. \end{aligned}$$

Ainsi, par exemple, pour $n_i = k_i = 2$, il existe 3264 coniques, qui touchent cinq coniques données (¹).

Quant aux courbes d'ordre supérieur, il a été fait aussi, jusqu'à un certain degré, des recherches générales se référant surtout aux courbes singulières qui se rencontrent dans les divers systèmes; une étude approfondie des considérations dont il s'agit n'est pas possible ici, à cause de sa complication; d'ailleurs jusqu'ici le côté algébrique des questions dont il s'agit n'a pas été étudié dans la mesure où l'exigerait une exposition du sujet en harmonie avec nos précédentes méthodes; nous nous bornerons pour cette raison à renvoyer aux travaux de M. Zeuthen (²).

Nous donnerons seulement ci-dessous la démonstration du théorème cité plus haut (³) sur le nombre des courbes d'un système

---

(¹) Des recherches plus approfondies sur les coniques qui satisfont à des conditions de contact données ont été faites par M. Zeuthen (*Nyt Bidrag til Laeren om Systemer af keglesnit*, Kjobenhavn, 1865, ou la traduction française, *Nouvelles Annales*, t. VI, 1866). Consulter aussi la fin de l'Ouvrage de Salmon, *Higher plane Curves*. Ainsi que M. Cremona l'a remarqué (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXIX, p. 776), il existe, pour un système doublement infini de coniques, trois nombres ρ, σ, τ ayant une signification analogue à celle des nombres μ, ν pour un système simplement infini; ρ désigne alors le nombre des coniques du système qui passent par deux points, σ le nombre de celles qui passent par un point et touchent une droite, τ le nombre de celles qui touchent deux droites. On n'a pas encore examiné sous quelles hypothèses le nombre des coniques du système qui satisfont à deux nouvelles conditions apparaît sous la forme $\alpha\rho + \beta\sigma + \gamma\tau$.

(²) *Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurved med Anvendelse til Bestemmelse af Karacteristikerne i de elementaere Systemer af fierde Orden*, avec un résumé en français (*Mémoires de la Société danoise des Sciences*, 5ᵉ série, t. X, 1873). *Voir* aussi un compte rendu dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. VII, 1874, p. 97.

(³) *Voir* Chasles, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 15 fé-

qui touchent une courbe fixe. Nous y ferons usage de la proposition auxiliaire qui suit :

Si l'on mène d'un point fixe toutes les tangentes possibles aux courbes d'un système (μ, ν), *le lieu des points de contact de ces tangentes est une courbe de l'ordre* $\mu+\nu$ *ayant au point fixe un point multiple d'ordre* μ.

Considérons une droite quelconque G, qui passe par le point fixe O. Une courbe du système qui coupe la droite G de telle manière que sa tangente au point d'intersection passe par O doit ou bien toucher la droite G, ou bien passer elle-même par O. Le nombre des courbes de cette nature est donc égal à $\nu+\mu$; et c'est là en même temps le nombre des points d'intersection du lieu considéré avec G. Le lemme énoncé se trouve ainsi démontré.

Désignons par C la courbe fixe du $n^{\text{ième}}$ ordre et de la $k^{\text{ième}}$ classe. Prenons dans le plan une droite quelconque G; menons d'un point x de cette dernière les k tangentes à la courbe C, et construisons en chacun des points de contact les tangentes aux μ courbes du système qui passent par ce point. Les susdites droites coupent G en $k\mu$ points y, qui correspondent au point x. Nous avons à rechercher le nombre des coïncidences des points x et y sur G. Or, inversement, à tout point y correspond, comme lieu des points de contact des tangentes que l'on peut mener de y à toutes les courbes du système, une courbe de l'ordre $\mu+\nu$ possédant en y (suivant le lemme qui vient d'être démontré) un point multiple d'ordre μ. Cette courbe coupe la courbe C en $n(\mu+\nu)$ points; si l'on mène en ces points les tangentes à C, les points de rencontre de ces dernières avec la droite G sont les points x qui correspondent aux points y. Entre x et y existe donc une correspondance

$$[k\mu, (\mu+\nu)n].$$

---

vrier 1864, et ZEUTHEN, *Math. Annalen*, t. III, p. 153. Le théorème a été étendu par M. FOURET à certains systèmes de courbes transcendantes qui sont définies par des équations différentielles algébriques (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. II. p. 72). Consulter aussi (t. III de ces Leçons) la théorie des connexes. *Voir* encore HALPHEN, *Sur la recherche des points d'une courbe algébrique plane qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle algébrique, et sur les questions analogues dans l'espace* (*Journal de Liouville*, 3e série, t. II, 1876). La démonstration qui suit au texte a été donnée par BRILL, *Math. Annalen*, t. X, p. 534.

Aux points de coïncidence de cette dernière appartiennent les n points où la droite G est rencontrée par la courbe fixe, et, comme on le reconnaît sans difficulté, chacun de ces points doit être compté μ fois. Ces $n\mu$ coïncidences ne proviennent pas de la confusion des tangentes correspondantes *dans toute leur extension*, mais seulement de leur rencontre accidentelle sur la droite G. Les

$$k\mu + n(\mu + \nu) - n\mu = k\mu + n\nu$$

autres points restants correspondent à celles des tangentes à la courbe fixe qui sont indépendantes de la situation de la droite G, et qui, par suite, les points de contact venant à se confondre, sont en même temps tangentes aux courbes du système. Nous pouvons, en conséquence, énoncer le théorème suivant, dont nous avons fait usage plus haut :

Si, dans un système simplement infini de courbes, il y en a μ passant par un point quelconque et ν tangentes à une droite quelconque, il existe dans ce même système $k\mu + n\nu$ courbes qui touchent une courbe d'ordre n et de classe k (indépendante du système).

A l'aide de ce théorème, on pourra trouver le nombre des courbes d'ordre quelconque qui dépendent uniquement des conditions de contact, si l'on étudie préalablement les systèmes élémentaires des courbes de cette nature, c'est-à-dire les systèmes dont les courbes sont déterminées par des points fixes et par des tangentes fixes. Jusqu'ici les systèmes élémentaires de certaines courbes du troisième et du quatrième ordre ont seuls été étudiés d'une manière approfondie ([1]).

([1]) *Voir*, pour les courbes du troisième ordre, MAILLARD, *Recherche des caractéristiques des systèmes élémentaires des courbes planes du troisième ordre* (Thèse pour le doctorat, 1870, publiée en décembre 1871), et ZEUTHEN, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXIV, 19, 26 février et 11 mars 1872; pour les courbes du quatrième ordre, ZEUTHEN, *ibid.*, t. LXXV, p. 703 et 950, et le Mémoire danois cité plus haut.

VII. — La Géométrie sur une courbe algébrique.

Nous avons déjà fait observer différentes fois que, parmi les points d'intersection de deux courbes, et en particulier parmi les points de base d'un faisceau de courbes, tous ne peuvent pas être choisis arbitrairement, et qu'au contraire un certain nombre sont déterminés par les autres.

Nous allons maintenant étudier avec plus de soin ces relations. Une courbe donnée du $n^{\text{ième}}$ ordre $f = 0$ est coupée par une courbe du $m^{\text{ième}}$ ordre $\varphi = 0$ en mn points que nous supposerons d'abord ne pas coïncider avec les points doubles ou les points de rebroussement de $f = 0$. Si m est $< n$, il y a nécessairement $\frac{m(m+3)}{2}$ points d'intersection donnés; ces points déterminent complétement la courbe $\varphi = 0$, par conséquent aussi ses autres points d'intersection avec $f = 0$. Si l'on a, au contraire, $m \geqq n$, on peut, s'il ne s'agit que des intersections des deux courbes et non de la courbe sécante φ elle-même, remplacer l'équation $\varphi = 0$ par l'équation

$$\varphi' = \varphi + \mu f = 0,$$

μ étant une expression du $(m-n)^{\text{ième}}$ ordre. Les

$$\frac{1}{2}(m-n+1)(m-n+2)$$

coefficients complétement arbitraires de μ peuvent être choisis de manière à annuler un pareil nombre de coefficients de la fonction φ'. On peut donc, sans modifier le système des points d'intersection, substituer à une courbe générale $\varphi = 0$ une courbe spéciale

$$\varphi' = \varphi + \mu f = 0,$$

qui ne dépend que de

$$\frac{m(m+3)}{2} - \frac{(m-n+1)(m-n+2)}{2} = mn - \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

constantes. Cette courbe réduite est alors déterminée par $mn - \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ points; si donc on donne un pareil nombre de points d'intersection de $f = 0$ et $\varphi' = 0$, les autres

$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ sont par là même fixés, et il en est naturellement de même à l'égard des points d'intersection de $f=0$ et $\varphi=0$, puisque ce sont les mêmes points.

Les deux nombres

$$mn - \frac{m(m+3)}{2} \quad \text{et} \quad \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

qui indiquent respectivement, pour le cas de $m<n$ et celui de $m \geqq n$, combien de points d'intersection du système sont donnés par les autres, se confondent lorsque $m=n-1$ et $m=n-2$. Pour $m>n-3$, on peut donc toujours admettre le nombre $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, lequel, et c'est là l'important, est complétement indépendant de m (¹); mais, pour des valeurs plus petites de m, le nombre des points qui sont donnés par les autres est plus faible.

Ces considérations demandent une légère modification lorsque φ passe par quelques-uns des points doubles ou de rebroussement de f. Ces points doivent, en effet, être comptés une seule fois comme éléments déterminateurs de φ, et au contraire deux fois comme points d'intersection de φ avec f. Le nombre des points d'intersection déterminés par les autres sera alors diminué du nombre (δ) des points qui coïncident avec les points exceptionnels dont nous parlons, et qui, par suite, sont connus par avance. On a en conséquence ce théorème :

Parmi les points d'intersection d'une courbe donnée du $n^{ième}$ ordre $f=0$ avec une courbe du $m^{ième}$ ordre assujettie à passer par δ points exceptionnels de $f=0$ sans y avoir elle-même de

---

(¹) Cette circonstance a d'abord été signalée pour les courbes du même ordre par Euler dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1748 (*Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes*); elle a été expliquée plus en détail par Cramer (*Introduction à l'Analyse*, etc., 1750, p. 78), et par Plücker (*Annales de Gergonne*, t. XIX). L'extension du théorème a été donnée en même temps par Jacobi, *De relationibus*, etc. (*Journal de Crelle*, t. 15) et par Plücker (*ibid.*, t. 16); on en trouve une généralisation encore plus étendue dans Plücker, *Theorie der algebraischen Curven*, Bonn, 1839, p. 11.) Pour l'exposition du texte, *voir* Clebsch et Gordan, *Theorie der Abelschen Functionen*, Leipzig, 1866, p. 34.

points multiples, le nombre des points déterminés par les autres sera :

1° *Si* $m \gtreqless n-2$, *de* $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta$;

2° *Si* $m < n-2$, *de* $mn - \dfrac{m(m+3)}{2} - \delta$.

Il est à peine besoin de faire observer que les points d'intersection non situés en des points singuliers de la courbe primitive peuvent se rapprocher indéfiniment les uns des autres suivant un groupement quelconque, sans que la vérité de notre théorème en soit influencée. La proposition souffre néanmoins exception lorsque les points à choisir arbitrairement dépendent d'une certaine manière les uns des autres. Si, par exemple, la courbe $\varphi = 0$ se décompose en plusieurs autres d'ordre moins élevé, le système entier des points d'intersection se décompose aussi en plusieurs autres, et dans chacun de ces systèmes de points d'intersection il ne doit se trouver parmi les points donnés qu'un nombre égal à celui qui suffit pour déterminer les autres, en vertu de notre théorème, dans une courbe d'ordre ainsi abaissé. Si, par exemple, nous coupons une courbe du quatrième ordre sans point double ($\delta = 0$) par une courbe du troisième ordre qui se décompose en une droite et en une conique, on ne peut choisir que deux points de la droite et cinq points de la conique, donc en tout seulement sept points pris arbitrairement sur C_4, tandis que, dans le système des points d'intersection d'une courbe quelconque C_3 avec C_4, 9 $\left[= 3n - \frac{1}{2}(n-1)(n-2)\right]$ points peuvent être choisis arbitrairement sur C_4. Au contraire, les points fixes (dont le choix est arbitraire) peuvent se décomposer en systèmes séparés sans que la vérité de notre théorème en soit influencée, à la seule condition que le système des points à déterminer par eux ne se décompose pas. Il peut arriver, d'autre part, que pour des systèmes non décomposables d'intersections les $mn - \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + \delta$ points donnés (dans le cas de $mn \geqq n-2$) ne suffisent pas pour déterminer les autres. On pourra même se poser précisément ce problème : Étant donnés

$$mn - \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + \delta - r$$

points, déterminer les r autres de manière que, pris avec les premiers, ils ne déterminent pas les autres $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ intersections d'une courbe du $m^{\text{ième}}$ ordre passant par les δ points exceptionnels de $f=0$. Et, en fait, le problème dont il s'agit, dans le cas de $m=n-3$, aura plus tard pour nous une importance toute particulière. Nous énoncerons donc le théorème donné ci-dessus sous une forme plus exacte en disant que $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-\delta$ ou $mn-\frac{1}{2}m(m+3)-\delta$ *points d'intersection* au plus *sont déterminés par les autres lorsqu'il n'intervient pas d'autres conditions.*

Ce théorème, à cause de ses nombreuses applications, fait partie des propositions les plus importantes de la théorie des courbes algébriques; il est en particulier le principe essentiel de ce qui va suivre ([1]). Nous observerons d'abord, pour le cas de $m=n$, que, parmi les m^2 points de base d'un faisceau, $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ sont en fait déterminés par les autres, et que par conséquent

$$\frac{1}{2}m(m+3)-1$$

seulement sont arbitraires (p. 93). La proposition appliquée aux courbes du troisième ordre donne d'ailleurs du théorème de Pascal une démonstration extrêmement simple et que nous ne voulons pas omettre de mentionner. Pour $m=n=3$ notre théorème est ainsi conçu :

Toutes les courbes du troisième ordre qui ont huit points communs passent encore par un neuvième point.

Soient maintenant les six points 1, 2, 3, 4, 5, 6 situés sur une conique et réunis en couples de telle manière que, dans le tableau (*voir* t. I, p. 63)

$\overline{12}$	$\overline{45}$	I
$\overline{23}$	$\overline{56}$	II
$\overline{34}$	$\overline{61}$	III

([1]) On peut en déduire une série d'autres théorèmes sur les systèmes de points d'intersection. Consulter Cayley, *Cambridge and Dublin mathematical Journal*, t. III, p. 211, et les Ouvrages cités de Cremona et Salmon. Nous nous occuperons plus tard partiellement de ces théorèmes.

les lignes situées l'une à côté de l'autre soient considérées comme les côtés opposés de l'hexagone. Désignant par I, II, III respectivement les points de rencontre de deux d'entre elles, nous pouvons regarder toute la figure comme formée de trois courbes décomposables du troisième ordre ayant huit points communs et qui sont :

1° La conique et la ligne $\overline{\text{I II}}$;

2° Les trois lignes $\overline{12}$, $\overline{56}$, $\overline{34}$;

3° Les trois lignes $\overline{45}$, $\overline{23}$, $\overline{61}$.

Chacune de ces courbes passe par les huit points 1, 2, 3, 4, 5, 6, I, II; par conséquent la troisième passe aussi par le neuvième point d'intersection III de deux d'entre elles, et le théorème de Pascal se trouve ainsi démontré (¹).

La proposition qui nous occupe forme, conjointement avec l'extension du principe de correspondance que nous établirons plus tard, la base de la *géométrie sur une courbe algébrique*, c'est-à-dire permet d'établir une théorie des groupes de points sur une courbe, semblable à celle que nous avons déjà appris à connaître relativement à la ligne droite (*Théorie des formes algébriques binaires*). Dans les recherches qui ont cet objet, l'importance fondamentale du *genre* (p. 65) d'une courbe algébrique du $n^{\text{ième}}$ ordre

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - d - r$$

se présentera à nous dans toute son étendue. Les propriétés les plus essentielles des systèmes de points sur une courbe apparaissent comme dépendant précisément du seul nombre p, et non de l'ordre et de la classe de la courbe, de telle sorte que nous serons ultérieurement forcés d'étudier les courbes de plus près suivant leur genre, et de les diviser à ce point de vue en classes essentiellement différentes. Ceci est en corrélation exacte avec la théorie des intégrales abéliennes et des transformations univoques; ce n'est qu'une fois en possession de ces théories que nous pourrons envi-

(¹) *Voir* PLÜCKER, *Analytisch-geometrische Entwicklungen*, t. I, 1828, p. 267.

sager dans son ensemble la géométrie sur une courbe. Nous sommes toutefois en situation de traiter d'une manière purement algébrique toute une série de problèmes, en nous appuyant surtout sur les travaux de Brill et de Nöther [1].

Nous nous bornons ici à la considération des systèmes de points qui sont traversés sur une courbe algébrique par ce qu'on appelle une *courbe adjointe,* restriction justifiée par ce fait que les théorèmes deviennent notablement plus compliqués pour les courbes non adjointes. *Sous le nom de* courbe adjointe, *nous entendons une courbe qui passe une fois par tous les points doubles et les points de rebroussement de la courbe fixe* ou plus généralement qui passe $i-1$ fois par tout point multiple d'ordre i pour celle-ci, sans que, en général, les branches particulières des deux courbes s'y touchent. Nous supposons ensuite que la courbe donnée du $n^{\text{ième}}$ ordre C_n possède en chaque point multiple des tangentes séparées [2]. Alors nous pouvons imaginer tout point multiple d'ordre i comme remplacé par $\frac{1}{2}i(i-1)$ points doubles (p. 34), et en ce qui concerne le genre poser

$$p=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-\sum_i \alpha_i\frac{i(i-1)}{2},$$

si la courbe C_n possède α_2 points doubles, α_3 points triples, ... α_i points multiples d'ordre i. Pour le système des points d'intersection d'une courbe adjointe, nous avons à poser dans les formules de notre théorème fondamental $\delta=\frac{1}{2}\Sigma\alpha_i i(i-1)$, et nous pouvons alors l'énoncer de la manière suivante, ainsi qu'on le reconnaît facilement, puisque dans un point multiple d'ordre i sont toujours réunis $i(i-1)$ points d'intersection avec la courbe adjointe.

Parmi les points d'intersection d'une courbe adjointe du $m^{\text{ième}}$ *ordre avec la courbe donnée* C_n *non situés aux points singuliers,*

---

[1] Consulter, pour ce qui suit, BRILL et NÖTHER, *Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie* (*Göttinger Nachrichten*, février 1873 et *Math. Annalen*, t. VII, p. 269).

[2] Sur la considération des points multiples à branches partiellement coïncidentes, *voir* la Section des *Transformations univoques*, dans le Tome III, ainsi que la fin de la présente Section.

1°. *Pour* $m > n - 3$, p *au plus sont déterminés par les* $nm - \Sigma\alpha_i . i(i-1) - p = n\alpha + p - 2[\alpha = m - (n-3)]$ *restants;*

2° *Pour* $m = n - 2 - r$, $p - 1 - \frac{1}{2}(r+2)(r-1)$ *au plus sont déterminés par les* $\frac{1}{2}m(m+3) - \frac{1}{2}\Sigma\alpha_i . i(i-1)$ *restants.*

Dans l'examen que nous allons faire des systèmes de courbes adjointes, ou plutôt dans l'examen des groupes de points déterminés sur C_n par des systèmes semblables, nous regarderons ces derniers comme caractérisés par les éléments suivants :

1° Le nombre (Q) des points qui se trouvent dans chaque groupe du système, c'est-à-dire le nombre des points d'intersection *mobiles* d'une courbe adjointe du système considéré. Cette dernière peut, en effet, en dehors des points singuliers de f, avoir un certain nombre de points d'intersection *fixes* communs avec C_n;

2° *La multiplicité du système,* c'est-à-dire le nombre (q) des paramètres arbitraires dont dépendent les coefficients d'une courbe du système;

3° *Le degré du système,* c'est-à-dire la dimension ou la forme suivant laquelle ces q paramètres entrent dans l'équation de la courbe. Ces paramètres seront toujours supposés par la suite entrer rationnellement.

Quelques exemples peuvent servir à mieux éclaircir ces caractères distinctifs. Supposons que C_n soit une courbe du troisième ordre sans points singuliers; alors toutes les droites du plan forment un système doublement infini ∞^2 $(q = 2)$ de courbes adjointes qui dépend linéairement de deux paramètres; les groupes de points déterminés par elles sur C_3 forment par suite un système *linéaire doublement infini de trois points* $(Q = 3)$. D'autre part, toutes les lignes qui passent par un point fixe de C_3 et qui, par conséquent, coupent encore cette courbe en deux points mobiles, déterminent un *système linéaire simplement infini de deux points* $(Q = 2, q = 1)$; puis les tangentes d'une conique fixe $x_1 x_3 - x_2^2 = 0$, étant représentables sous la forme

$$x_1 + 2\lambda x_2 + \lambda^2 x_3 = 0,$$

forment un *système quadratique simplement infini de trois points*. Si C_3 a un point double et que nous considérions le faisceau de rayons issu de ce point, chaque rayon rencontrant encore C_3 en un point mobile, le faisceau en question détermine un *système simplement infini d'un seul point* ($Q = 1$). Enfin, généralement, toutes les courbes adjointes du $m^{\text{ième}}$ ordre (m étant $> n - 3$) qui passent par s points fixes quelconques déterminent sur C_n un système linéaire de groupes de points pour lesquels

$$Q = nm - \Sigma\alpha_i . i(i-1),$$
$$q = nm - \Sigma\alpha_i . i(i-1) - p - s;$$

car, parmi les Q points d'intersection, il y en a p qui, d'après notre théorème fondamental sur les systèmes d'intersections, sont déterminés par les autres, et par conséquent $Q - p$ seulement restent arbitraires; on a donc $q = Q - s - p$. Si, au contraire, parmi les s points fixes, R sont situés sur C_n, nous avons

$$Q = mn - \Sigma\alpha_i . i(i-1) - R,$$
$$q = mn - \Sigma\alpha_i . i(i-1) - s - p.$$

Tandis que les groupes de points sur C_n apparaissent, d'après l'exposition précédente, comme dépendant essentiellement des courbes adjointes qui leur appartiennent, on parvient, au moyen du théorème appelé *théorème du reste,* dont nous abordons maintenant l'explication, à définir ces groupes dans une certaine mesure indépendamment des courbes qui les traversent, en sorte qu'ils sont davantage des figures subsistant par elles-mêmes conformément aux exigences de la Géométrie sur une seule courbe. Pour pouvoir énoncer d'une manière précise et démontrer ce *théorème du reste,* nous devons introduire les dénominations suivantes.

Sous le nom de *résidu* d'un groupe G_Q de Q points, nous désignons tout groupe de points (G_R) qui, réuni au premier, forme le système complet des intersections de la courbe en question C_n avec une courbe adjointe; l'ordre de cette dernière est ici indifférent. Nous devons encore une fois faire remarquer que, dans le système des points d'intersection, nous ne comprenons pas les intersections qui sont situées aux points singuliers de C_n; mais, comme leur nombre $\Sigma\alpha_i.(i-1)$ reste toujours fixe pour la même courbe, nous compléterons, cela va sans dire, le nombre total par

celui-là. Il peut, d'ailleurs, arriver que, parmi les points de G_Q (par exemple, par suite d'un contact de la courbe sécante avec les branches de la courbe primitive aux points singuliers), il se trouve en ces points un nombre d'intersections plus grand que le nombre normal; celles qui dépassent ce nombre doivent être comptées parmi les $Q+R$ points. Le groupe de points G_R est dit *résiduel* de G_Q et réciproquement.

Nous appelons *corésiduels par rapport à* G_Q deux groupes de points G_R et $G_{R'}$ qui sont résiduels d'un même groupe G_Q, et qui, par conséquent, peuvent être coupés par deux courbes adjointes dont les autres intersections avec C_n tombent toutes aux points Q: ces deux courbes peuvent être du même ordre ou d'un ordre différent. La notion de la *corésidualité* tire son importance spéciale de ce fait, qu'au moyen du théorème du reste elle est précisément rendue indépendante d'un résidu spécial G_Q.

Pour donner un *exemple* de l'application de cette définition, choisissons une courbe du cinquième ordre ($n=5$) ayant deux points doubles ($p=4$). Toutes les coniques adjointes qui passent par deux points fixes de C_5 (et par les points doubles) coupent encore C_5 en quatre autres points. Chacun de ces groupes G_4 est résiduel des deux premiers points fixes, et ils sont, en nombre simplement infini, tous corésiduels relativement au groupe fixe G_2.

Le théorème à démontrer est maintenant d'une manière générale ainsi conçu :

Si sur une courbe algébrique les groupes de points G_R, $G_{R'}$, ... *sont corésiduels entre eux relativement à un groupe de points* G_Q, *ils sont aussi corésiduels relativement à tout autre groupe de points* $G_{Q'}$ *qui est résiduel de l'un d'eux (par exemple de* G_R*)* [1].

Nous éclaircirons d'abord le sens du théorème par quelques exemples. Considérons de nouveau une courbe C_5 ayant deux points

---

[1] Ce théorème a été aussi donné pour les courbes du troisième ordre par M. Sylvester, et se trouve dans l'Ouvrage de Salmon sur les courbes supérieures qui a paru en même temps que la Note publiée par Brill et Nöther dans les *Göttinger Nachrichten*. Historiquement il a sa première origine, quoique non sous le rapport de la forme, dans le théorème d'addition des intégrales abéliennes. Il est, du reste, encore vrai à l'égard des groupes de points sur une courbe décomposable; car, dans la démonstration, nous n'aurons nul besoin de supposer l'irréductibilité de la courbe $f=0$.

doubles ($p=4$) et le faisceau de courbes adjointes C_2 passant par deux points fixes G_2 (et en outre par les points doubles). Ce dernier faisceau nous détermine un système linéaire simplement infini de groupes G_4 qui sont corésiduels relativement à G_2. Mais, par un tel groupe G_4, on ne peut faire passer qu'une seule conique adjointe; donc, pour parvenir à un groupe $G_{Q'}$ qui soit corésiduel du groupe G_2 relativement à un groupe G_4, nous devons faire passer par G_4 une courbe adjointe d'un ordre plus élevé, par exemple du troisième ordre. Celle-ci coupe alors encore la courbe C_5 en sept autres points qui forment un groupe C_7 corésiduel de G_2 relativement à G_4. Maintenant le théorème du reste exprime que par ces points G_7 on peut faire passer un faisceau de courbes adjointes C_3 déterminant sur C_5 le *même* système de groupes de points G_4 que celui déterminé auparavant par nous au moyen d'un faisceau de coniques adjointes. La courbe adjointe C_3 menée d'abord arbitrairement par l'un des groupes G_4 aurait pu aussi être choisie de manière à toucher C_5 en l'un des quatre points, en sorte qu'un point du groupe G_7 découpé par elle aurait coïncidé avec un point de G_4; rien ne sèrait par là changé au fond des choses. Observons en général que *les groupes* G_R, $G_{R'}$, ... *et les groupes* G_Q, $G_{Q'}$, ... *peuvent indifféremment renfermer des points ou tous différents ou partiellement les mêmes.*

Pour démontrer notre théorème, admettons que la courbe donnée (C_n) soit

$$f=0,$$

et que sur elle les groupes des points

G_Q et G_R	soient déterminés	par	$A=0$,
G_Q et $G_{R'}$	»	par	$B=0$,
$G_{Q'}$ et G_R	»	par	$\alpha=0$,

$A=0$, $B=0$, $\alpha=0$ étant des courbes adjointes à $f=0$: nous avons à montrer que les groupes $G_{Q'}$ et $G_{R'}$ sont aussi situés sur une courbe adjointe. On peut, en effet, ainsi qu'il sera démontré incessamment, trouver toujours deux courbes adjointes

$$\beta=0, \quad \gamma=0,$$

telles que l'équation

$$\alpha.B=\beta.A+\gamma.f \tag{1}$$

ait lieu identiquement. Car alors, en outre des points singuliers de f, la courbe (décomposable)

$\alpha.B = o$	renferme les groupes de points	$G_Q, G_{Q'}, G_R, G_{R'}$,
$\gamma.f = o$	»	$G_Q, G_{Q'}, G_R, G_{R'}$,
$A = o$	»	G_Q, G_R;

par conséquent, pour que $\beta.A$ soit nul pour tous les points racines communs de $\alpha.B$ et $\gamma.f$, $\beta = o$ doit nécessairement renfermer les groupes $G_{Q'}$ et $G_{R'}$, ce qu'il fallait démontrer.

La circonstance que l'identité (1) peut toujours être établie en fait résulte de ce que le produit $\alpha.B$ remplit toutes les conditions auxquelles, d'après un théorème de Nöther exposé plus haut par nous (¹), est attachée la possibilité de le ramener à la forme du second membre; car ce produit s'évanouit pour tous les points communs de $A = o$ et $f = o$, et, en précisant, $2i - 2$ fois en chaque point multiple d'ordre i de $f = o$, tandis que $A = o$ a en un tel point un point multiple d'ordre $i - 1$. En vertu de l'*identité* (1), le rôle de $\beta.A$ vis-à-vis de $\gamma.f$ doit être complétement analogue à celui de $\alpha.B$; $\beta = o$ s'annule donc $i - 1$ fois en tout point de f multiple d'ordre i, sans toucher les branches de f, c'est-à-dire représente une courbe adjointe, ce qui était à démontrer.

A la place de $B = o$, nous pouvons maintenant faire intervenir un système de courbes $B = o$ passant toutes par G_Q, si nous considérons les coefficients de B comme dépendant d'un certain nombre de paramètres. Ces courbes découpent sur f un système de groupes mobiles $G_{R'}$. Si alors $A = o$ est une courbe fixe qui passe par G_Q, et en outre par un groupe G_R, que $\alpha = o$, d'autre part, soit une courbe fixe passant par G_R et en outre par un troisième groupe $G_{Q'}$, et que l'identité (1) doive encore avoir lieu, $\beta = o$ représentera évidemment un second système de courbes qui passent toutes par les points fixes $G_{Q'}$ et découpent sur $f = o$ le *même* système de groupes mobiles $G_{R'}$ que celui qui a été auparavant déterminé par nous au moyen de l'ensemble des courbes $B = o$. Et il faut, si (1) doit être une équation *identique*, que le système $\beta = o$ ren-

(¹) *Voir* p. 45. Nous n'avons, dans le théorème cité, qu'à remplacer f par $\alpha.B$, φ par A, ψ par f, et à prendre $r = i$, $q = i - 1$. C'est là aussi que se trouve la raison pour laquelle, dans ces recherches, on se restreint aux courbes adjointes.

ferme les mêmes paramètres arbitraires sous la même forme que le système $B = 0$. Les deux systèmes $B = 0$ et $\beta = 0$ sont donc complétement permutables en ce qui concerne leurs relations avec $f = 0$; nous dirons qu'ils sont *équivalents* l'un à l'autre. Si, en particulier, les paramètres y entrent *linéairement*, nous pouvons énoncer ce résultat dans le théorème suivant, dont nous aurons plusieurs fois à faire usage :

Le nombre des courbes linéairement indépendantes les unes des autres d'un système linéaire de courbes adjointes est égal au nombre correspondant relatif à tout système équivalent. Quant à ce dernier, on ne pourrait naturellement choisir un système particularisé par des conditions spéciales et représentant par suite un ensemble d'une multiplicité plus faible.

Comme exemple d'éventualités de cette nature, considérons deux faisceaux de courbes simplement infinis, ce qui nous ramènera au mode de génération des courbes algébriques donné par MM. Chasles et de Jonquières. Par un point fixe (d'où $Q = 1$) d'une courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre (C_n) sans points singuliers, faisons passer un faisceau de rayons $B \equiv u_x + \lambda v_x = 0$ qui détermine sur C_n un système linéaire simplement infini de groupes G_{n-1} ($= G_{R'}$). Par un groupe quelconque ($= G_R$) de ces groupes G_{n-1} (déterminé par $A \equiv u_x + \lambda' v_x = 0$) faisons passer une courbe du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre $\alpha = 0$, ce qui est toujours possible; cette courbe coupe encore la courbe C_n en un groupe $G_{Q'}$, composé de $n(n-1) - (n-1) = (n-1)^2$ points : on doit alors pouvoir déterminer un système de courbes $\beta = 0$ de manière à avoir de nouveau

$$\alpha . B \equiv \beta . A + \gamma . f,$$

c'est-à-dire que par le groupe cité $G_{Q'}$ de $(n-1)^2$ points passe encore un nombre infini de courbes du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre $\beta = 0$. L'ensemble de ces dernières forme un faisceau équivalent à $B = 0$, de telle sorte qu'à chaque courbe $B = 0$ est associée par notre construction *une* courbe $\beta = 0$ et inversement ([1]). Les deux faisceaux sont donc l'un à l'égard de l'autre en relation projective,

---

([1]) On démontre en effet facilement que, sur le terrain binaire, toute transformation univoque est nécessairement linéaire.

et l'on peut, par suite, s'imaginer la courbe C_n comme engendrée par eux de la manière connue (p. 95). Nous reviendrons plus tard sur ce sujet.

Nous nous restreindrons dans ce qui suit à la considération des *systèmes linéaires de groupes de points*. Pour abréger, nous introduirons les notations suivantes :

Par $g_Q^{(q)}$, $\gamma_Q^{(q)}$, ... nous désignerons un système linéaire q fois infini de groupes de chacun Q points et par $G_Q^{(q)}$, $\Gamma_Q^{(q)}$, ... un groupe individuel d'un tel système $g_Q^{(q)}$, $\gamma_Q^{(q)}$.

Tout groupe dans un système linéaire $g_Q^{(q)}$ est évidemment fixé sans ambiguïté par q points à choisir arbitrairement ; les autres $Q - q$ points d'un groupe du système sont par là déterminés avec les premiers. Comme maintenant, d'après notre théorème fondamental sur les systèmes de points d'intersection de courbes du $m^{\text{ième}}$ ordre sur C_n, dans le cas de $m > n - 3$, p points au plus, dans le cas de $m = n - 2 - r$, $p - 1 - \frac{1}{2}(r + 2)(r - 1)$ points au plus sont déterminés par les autres, nous avons ce théorème :

Entre les nombres q, Q d'un système $g_Q^{(q)}$ déterminé par les intersections des courbes du $m^{\text{ième}}$ ordre sur une courbe du genre p existe la relation :

Cas de $m > n - 3$......... $q \geqq Q - p$

Cas de $m = n - 2 - r$..... $q \geqq Q - p + 1 + \frac{1}{2}(r + 2)(r - 1)$.

Ce qu'il y a surtout d'important, ainsi que nous l'apprendront des applications ultérieures, c'est la circonstance que l'on peut obtenir la réciproque de ce théorème dans le cas de $m \leqq n - 3$. Il nous suffit de le démontrer pour $m = n - 3$; car nous n'avons supposé nulle part que les courbes adjointes ne fussent pas décomposables, et par conséquent tout système de courbes d'ordre moins élevé peut être porté à l'ordre $n - 3$ par l'addition de courbes fixes. D'ailleurs ces courbes sont de la plus grande importance pour ce qui suit, et spécialement pour les transformations à détermination unique. Pour cette raison, nous énoncerons encore une fois relativement à elles les théorèmes sur les points d'intersection :

Parmi les $2p - 2$ points d'intersection d'une courbe adjointe

du $(n-3)^{\text{ième}}$ ordre, si p est > 1, $p-1$ au plus (¹) *sont déterminés par les $p-1$ restants, et entre les nombres q, Q d'un système découpé par les courbes de cette nature existe la relation*

$$q \geqq Q - p + 1.$$

La réciproque actuellement à démontrer du dernier théorème consiste dans ce qui suit :

Un système linéaire q fois infini $g_Q^{(q)}$ de groupes comprenant chacun Q points peut toujours être découpé par un système de courbes adjointes du $(n-3)^{\text{ième}}$ ordre si

$$(2) \qquad q \geqq Q - p + 1, \quad \text{d'où} \quad Q - q \leqq p - 1.$$

Observons que, parmi les Q points de chaque groupe $G_Q^{(q)}$, il peut s'en trouver qui soient les mêmes pour tous les groupes du système $g_Q^{(q)}$. Pour Q une limite supérieure nous est donnée par la condition

$$Q \leqq 2p - 2;$$

car, en général, c'est là seulement le nombre d'intersections mobiles d'une courbe C_{n-3}. Cette condition est néanmoins sans influence sur la marche de la démonstration, et de cette circonstance nous tirerons précisément une conséquence digne de remarque.

Il est d'abord d'évidence immédiate que le théorème est exact pour $q = 0$ (d'où $Q \leqq p-1$); car, par un groupe individuel complétement déterminé de $p-1$ points ou d'un plus petit nombre, on peut toujours faire passer une courbe adjointe du $(n-3)^{\text{ième}}$

(¹) Le mot *au plus* est nécessaire, à cause, par exemple, du cas suivant : Prenons sur une courbe C_4 à deux points doubles ($p = 4$), $p - 1 = 3$ points sur une droite passant par un des points doubles; une autre droite, menée par l'autre point double, complète la première, de manière à former avec elle une conique adjointe (C_{n-3}); mais les trois points d'intersection de la seconde ne sont pas déterminés par ceux de la première, et forment, au contraire, un système $g_3^{(1)}$. D'autre part, si l'on prend les $p-1 = 3$ points, de telle manière que deux soient situés sur une droite passant par l'un des points doubles et un sur une droite passant par le second point double, les trois autres intersections seront par là encore déterminées. Dans les courbes du genre $p = 0$ ou $p = 1$, des théorèmes semblables ont lieu à l'égard des courbes d'ordre $n - 2$.

ordre. On voit facilement aussi l'exactitude du théorème pour $q = 1$ (d'où $Q \leqq p$); car, pour $Q = p$ et $m > n - 3$, p points seraient en général déterminés par les autres qui sont ici fixes; ils ne peuvent donc être mobiles que pour le cas de $m \lesseqgtr n - 3$. Mais, si les points fixes de la courbe sécante C_m sont situés de telle sorte qu'ils ne déterminent pas les autres points p, nous construirons comme il suit un faisceau spécial équivalent du $(n-2)^{\text{ième}}$ ordre. Nous ferons passer par un des groupes mobiles $G_p^{(1)}$ une courbe C_{n-2} qui se décompose en une droite A et une courbe C_{n-3}, de telle sorte que cette dernière soit déterminée par $p-1$ des points de $G_p^{(1)}$ et rencontre encore C_n en $p-1$ autres points Γ_{p-1}, tandis que la droite A passe d'une manière quelconque par le $p^{\text{ième}}$ point α et coupe encore C_n en $n-1$ autres points Γ_{n-1}. Ce dernier groupe Γ_{n-1} forme alors, conjointement avec Γ_{p-1}, le système des points de base du faisceau équivalent de C_{n-2} qui détermine le système $g_p^{(1)}$. Mais la droite A est commune à toutes ces courbes C_{n-2}, et il reste par conséquent un faisceau de courbes C_{n-3} par lequel doit être découpé le système $g_p^{(1)}$. En particulier aussi, puisque cela arrive pour *tous* les autres groupes du système, le groupe $G_p^{(1)}$ utilisé dans notre construction est nécessairement situé sur une courbe C_{n-3}; et de là résulte que, des $p-1$ points de Γ_{p-1}, l'un coïncide avec le point α. Nous pouvons énoncer ce résultat $(Q = p,\ q = 1)$ de la manière suivante:

Si un faisceau de courbes adjointes détermine un système $g_p^{(1)}$, c'est-à-dire a p points d'intersection mobiles (avec la courbe principale), tout point d'un groupe individuel $G_p^{(1)}$ du système est situé avec les $p-1$ autres points sur une courbe C_{n-3}, et ces courbes C_{n-3} forment un faisceau équivalent au premier.

Enfin, pour $q = 1$, $Q < p$, l'exactitude de notre théorème précédent est encore évidente; car, par $p-1$ points ou un nombre moindre, on peut toujours faire passer une courbe C_{n-3}, et par conséquent la construction d'un faisceau équivalent de courbes C_{n-3} va ici de soi.

On peut, en général, suivre une marche semblable de démonstration en s'élevant d'un système $g_{Q-1}^{(q-1)}$ à un système $g_Q^{(q)}$.

Il nous suffit donc de montrer que le théorème est exact pour

tout système $g_Q^{(q)}$, s'il est exact pour les systèmes $g_{Q-1}^{(q-1)}$, en supposant toujours que l'on ait $q \geqq Q - p + 1$.

Représentons par l'équation $\Psi = 0$ le système q fois infini de courbes déterminé sur la courbe primitive $f = 0$ par le système donné $g_Q^{(q)}$, en sorte que Ψ dépende linéairement de q paramètres. Soit $\Psi_0 = 0$ une courbe arbitrairement choisie de ce système; supposons qu'elle détermine sur $f = 0$ le groupe T_Q et soit α un point de ce groupe. Tous les groupes du système donné $g_Q^{(q)}$ dans lesquels figure α forment un système $g_{Q-1}^{(q-1)}$; ce dernier peut, conformément à l'hypothèse, être déterminé par un système de courbes C_{n-3}. On peut donc toujours, par les $Q - 1$ points du groupe T_Q différents de α, faire passer une courbe C_{n-3}, que nous représenterons par $\varphi = 0$. Par le point α menons une droite quelconque $u_x = 0$. D'après le *théorème du reste*, le système donné $g_Q^{(q)}$ peut être déterminé par un ensemble linéaire q fois infini de courbes C_{n-2}. Cet ensemble est représenté par $\Phi = 0$ si

$$u_x \varphi_0 \Psi = \Phi_0 \Psi_0 + Bf.$$

Toutes les courbes du système $\Phi = 0$ passent nécessairement par les points d'intersection de $u_x \varphi_0 = 0$ et $f = 0$ non situés sur $\Psi_0 = 0$ (c'est-à-dire qui n'appartiennent pas à T_Q); il en est ainsi en particulier pour les $n - 1$ points d'intersection différents de α de la ligne $u_x = 0$ avec $f = 0$. Toute courbe C_{n-2} se décompose donc en la droite $u_x = 0$ et en une courbe C_{n-3}. On peut en conséquence poser $\Phi = u_x \varphi$, si $\varphi = 0$ représente un ensemble q fois infini de C_{n-3}, ce qu'il fallait démontrer.

L'exemple suivant pourra servir à rendre plus clair le théorème démontré ici. Nous disons que, sur une courbe du cinquième ordre à deux points doubles, les seuls groupes $g_3^{(1)}$ possibles sont les deux systèmes simplement infinis qui sont déterminés par les rayons passant par le point double.

En effet, d'après notre théorème, chaque système $g_3^{(1)}$ peut être coupé par des coniques adjointes; si donc un faisceau de courbes C_2 doit, en outre des points doubles, avoir encore 3 $(= p - 1)$ points fixes communs avec C_5, il faut nécessairement que chacune des courbes C_2 du faisceau se décompose.

Dans la démonstration, nous n'avons à aucun endroit fait usage

de la condition $Q \leqq 2p - 2$. Même si cette condition n'était pas satisfaite, les mêmes conclusions, et par conséquent aussi le théorème qui en résulte, seraient encore vraies. Mais, comme il n'existe pas de courbes adjointes C_{n-3} ayant plus de $2p-2$ points d'intersection, nous devons, en revenant en arrière, conclure qu'*il n'existe pas de groupes de points* $G_Q^{(q)}$ *de plus de* $2p-2$ *points à l'égard desquels on ait* $q \geqq Q - p + 1$.

Cette remarque peut servir à la démonstration d'un important théorème. Les groupes G_Q qui sont découpés par des courbes adjointes C_{n-3} forment au moins un système $Q - p + 1$ fois infini: par conséquent, les groupes G_{2p-2} forment un système *au moins* $p-1$ fois infini; d'autre part, ils forment *au plus* un tel système. Car s'ils formaient, par exemple, un système p fois infini, on pourrait, par l'addition à chaque groupe du système du même point *fixe* arbitraire β, établir un système $g_{2p-1}^{(p)}$; mais un tel système, en vertu de la remarque que nous venons de faire, ne peut exister. Il n'y a donc aucun système $g_{2p-2}^{(p)}$, et à plus forte raison aucun système $g_{2p-2}^{(p+1)}$, etc. Ainsi :

Il n'existe qu'un système $p-1$ *fois infini, autrement dit que* p *courbes adjointes du* $(n-3)^{ième}$ *ordre linéairement indépendantes les unes des autres.*

Avec ce théorème, que nous rencontrerons encore de nouveau plus tard, nous terminons les recherches de cette nature sur les systèmes de points d'intersection, pour y revenir ultérieurement en connexion avec la théorie des fonctions abéliennes; elles se montreront alors sous un nouveau point de vue et pourront être énoncées d'une manière plus simple sous le bénéfice de nouveaux moyens auxiliaires. Ce que nous avons exposé ici peut, pour le moment, suffire à donner un aperçu de la méthode suivie par Brill et Nöther.

VIII. — Continuation. — Extension du principe de correspondance.

Il existe une proposition qui n'est pas en corrélation immédiate avec les considérations précédentes, mais qui n'est pas moins importante à l'égard de la géométrie sur une courbe : c'est celle qu'on appelle *le principe de correspondance étendu;* nous en abordons

maintenant l'exposition. Ce principe est une généralisation indiquée par Cayley et démontrée par Brill, relativement à une courbe quelconque du principe de correspondance de Chasles, qui a lieu pour une droite et qui nous est déjà connu (t. I, p. 261). En ce qui concerne les courbes du genre zéro, ce nouveau principe n'offre rien de différent du principe de Chasles; il s'ajoute seulement au nombre donné plus haut un nombre dépendant du genre de la courbe C_n, ce qui fait ressortir de nouveau la haute importance du genre pour une courbe [1]. Les nombreux problèmes à la résolution desquels on parvient au moyen de ces formules plus générales de *correspondance*, et dont nous signalons quelques-uns dans ce qui suit, justifient suffisamment l'examen approfondi que nous ferons du sujet.

Soit

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

l'équation de la courbe considérée C_n, que nous supposerons de l'ordre n et du genre p, et admettons d'abord qu'elle n'ait aucun point double et aucun point de rebroussement. Soit donnée ensuite une équation

$$\varphi(\overset{r}{x}, \overset{s}{y}) = 0, \tag{2}$$

en vertu de laquelle à chaque point x du plan correspond une courbe d'ordre s, à chaque point y une courbe d'ordre r. Sur la courbe d'ordre f nous avons alors, lorsque simultanément

$$f(x) = 0 \quad \text{et} \quad f(y) = 0,$$

---

(1) Le principe a d'abord été énoncé sans démonstration par CAYLEY, *Comptes rendus*, t. LXII, p. 586, et plus en détail dans le Mémoire, *On the correspondence of two points on a curve* (*Proceedings of the London math. Society*, t. I, 1866), où se trouve une démonstration pour un cas particulier; il a été enfin traité par le même auteur avec de nombreuses applications dans le travail : *Second Memoir on the curves which satisfy given conditions* (*Philos. Transactions of the R. Soc. London*, t. CLVIII, 1868). Une démonstration algébrique d'une formule plus générale a été donnée en même temps par BRILL : *Ueber Entsprechen von Punktsystemen auf einer Curve* (*Math. Annalen*, t. VI, p. 33; 1873), et plus géométriquement : *Ueber die Correspondenzformel* (*ibid.*, t. VII, p. 60; 1874). M. Lindemann a donné une démonstration du même principe à l'aide des intégrales abéliennes (*Journal de Crelle*, t. 84, p. 301.) — Chasles avait déjà mis à profit l'exactitude de son principe pour les courbes de genre zéro : *Comptes rendus*, t. LXII, p. 584; 1866.

une *correspondance* en vertu de laquelle à chaque point y de la courbe répondent $a = rn$ points x, et à chaque point x de la même courbe $b = sn$ points y. On doit ici supposer d'abord que *toutes les courbes mobiles correspondant à y ou à x n'ont pas les mêmes points fixes communs* [1], que, par conséquent, les points a ou b sont tous mobiles avec y ou x. Maintenant la courbe d'ordre $r + s$

$$(3) \qquad \varphi(\overset{r}{x}, \overset{s}{x}) = 0$$

représente le lieu d'un point tel que la courbe qui lui correspond passe par ce point lui-même. Elle détermine donc, sur f,

$$(r+s)n = a + b$$

points pour lesquels un des points x qui correspondent à y tombe en y ou réciproquement. Nous appellerons ces $a + b$ points les *points de coïncidence de la correspondance* φ; nous désignerons, pour abréger, par (a, b) la correspondance elle-même en tant qu'elle est considérée relativement à φ.

Les considérations précédentes cessent néanmoins d'être exactes si l'équation (3), par suite de $f(x) = 0$ et $f(y) = 0$, est satisfaite pour *tout* point x ou y de f [2], c'est-à-dire si, parmi les points d'intersection des courbes correspondant à x, un ou plusieurs, γ par exemple, coïncident avec x lui-même, et si, parmi les points d'intersection des courbes correspondant à y, δ sont situés en y. Cette circonstance peut provenir de ce que la courbe dont il s'agit a en x un contact d'ordre $\gamma - 1$ avec f, c'est-à-dire γ points d'intersection infiniment voisins, ou un point multiple d'ordre γ, ou un point multiple d'ordre ρ et $\gamma - \rho$ points d'intersection successifs, ces derniers pouvant alors être distribués de diverses manières sur les ρ branches de la courbe φ. Nous disons dans tous ces cas que la courbe a avec f un *point d'intersection de γ valeurs*. Les choses se passent d'une manière analogue pour γ et δ. Mais

---

[1] Pour ce qui concerne ces cas, nous renvoyons à la Section *Sur les transformations univoques*, au commencement du tome III.

[2] C'est ce qui arrive, par exemple, si $\varphi = \psi(x)\chi(y) - \chi(x)\psi(y)$ ou si φ, pour $x = y$, renferme comme facteur une puissance de f.

c'est un fait très-important que *l'on doive toujours avoir*

$$(4) \qquad \gamma = \delta.$$

Imaginons, en effet, que de $\varphi(x,y) = 0$ on élimine à l'aide de $f(x) = 0$ une des coordonnées x_i de x, x_3 par exemple; alors, dans l'équation d'élimination, le facteur $x_1 y_2 - x_2 y_1$ doit nécessairement se rencontrer γ fois, puisqu'il s'annule γ fois pour $x_i = y_i$. Si ensuite on élimine encore y_3 au moyen de $f(y) = 0$, le résultant renferme ce facteur $n\gamma$ fois. Mais on doit obtenir le même résultat si inversement on élimine d'abord y_3 et ensuite x_3, le facteur ci-dessus se présentant alors $n\delta$ fois. On a donc en fait $\gamma = \delta$. Le nombre γ apparaît comme caractéristique à l'égard de la correspondance φ; nous désignerons une telle correspondance possédant en x un point de γ valeurs par $(a - \gamma, b - \gamma)_\gamma$ ou par $(\alpha, \beta)_\gamma$, en posant $a - \gamma = \alpha$, $b - \gamma = \beta$.

Notre problème est maintenant d'indiquer combien de fois encore un $(\gamma + 1)^{\text{ième}}$ point d'intersection de la courbe correspondant à x coïncide avec x, c'est-à-dire *combien de fois, dans la correspondance* $(a - \gamma, b - \gamma)_\gamma$, *un point* y *coïncide avec l'un des points correspondants* x.

Dans ce but, considérons d'abord pour $\gamma = 0$ simultanément deux correspondances (a, b) et (a', b'),

$$\varphi(\overset{r}{x}, \overset{s}{y}) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'(\overset{r'}{x}, \overset{s'}{y}) = 0,$$

et demandons-nous quel est le nombre des couples de points x, y sur f qui satisfont en même temps aux deux correspondances [1]. Or, à chaque point y du plan correspondent les rr' points d'intersection x des courbes $\varphi = 0$, $\varphi' = 0$ qui sont en corrélation avec lui; de même à chaque point x du plan sont liés ss' points y. Si y se meut sur une droite, les rr' correspondants x, ainsi que nous l'avons vu dans une autre occasion (p. 109), parcourent une courbe de l'ordre $rs' + sr'$; par conséquent, si y décrit notre

---

[1] Il y a entre ce problème et le précédent la même relation qu'entre le problème de la détermination du degré du résultant de deux équations et le problème de la détermination du degré du discriminant d'une seule équation.

courbe f, ils parcourent une courbe de l'ordre

$$n(rs' + sr'). \tag{5}$$

Chaque point d'intersection x de cette dernière avec f donnera avec un point y situé sur f un couple de l'espèce cherchée. Le nombre des couples de points qui satisfont en même temps aux deux correspondances (a, b), (a', b') sur f est donc égal à

$$n^2(rs' + sr') = ab' + ba'. \tag{6}$$

Si les points x et y présentent à l'égard des deux correspondances une relation *symétrique* (auquel cas on a nécessairement $a = b$, $a' = b'$), le procédé employé donnera *la même* courbe de l'ordre $n(rs' + sr')$, que nous fassions cheminer x ou bien y sur la courbe f; chaque point d'intersection avec f contribue ainsi deux fois à la formation d'un couple. Le nombre des couples cherchés est donc égal à la moitié du nombre qui vient d'être trouvé: $r = ad' = bb'$.

Le nombre précédent $ab' + ba'$ doit subir une réduction si l'une des correspondances ou toutes les deux ont un point de plusieurs valeurs en $x = y$ et si l'on se propose d'indiquer le nombre de points x, y ayant sur f une situation séparée qui satisfont aux deux correspondances. Si en effet φ', par exemple, possède un point de γ' valeurs (en sorte que pour φ', lors du transport de x sur f, γ' points y soient toujours réunis avec x), un couple composé de deux points voisins x, y de cette espèce satisfait en même temps à la correspondance φ, aux $(a + b)$ points de f où ont lieu des coïncidences de φ, et γ' fois en chacun de ces points; nous avons donc à retrancher le nombre $\gamma'(a + b)$. *Le nombre des couples séparés de points qui satisfont simultanément aux deux correspondances*

$$(a, b) \quad \text{et} \quad (a' - \gamma', b' - \gamma')_{\gamma'}$$

est, par conséquent, égal à

$$a(b' - \gamma') + b(a' - \gamma'). \tag{7}$$

Nous déterminerons la réduction ultérieure qui a lieu si φ a en même temps un point de γ' valeurs en $x = y$, c'est-à-dire si les cor-

respondances données sont

$$\varphi = (a-\gamma, b-\gamma)_\gamma, \quad \varphi' = (a'-\gamma', b'-\gamma')_{\gamma'},$$

au moyen des considérations de limites qui suivent.

Imaginons d'abord que l'une des correspondances, φ par exemple, soit un peu déformée (c'est-à-dire que les coefficients de l'équation correspondante $\varphi = 0$ soient un peu modifiés), de manière qu'elle se change en une autre

$$\pi = (a, b)_0$$

qui ne possède en x ni point de valeur unique ni point de valeur multiple, *mais donne, au contraire, sur* C_n γ *points* x *ou* y *voisins de celui-ci pour tout point* y *ou* x. Le nombre des couples de points communs aux correspondances π et φ' est, d'après ce qui précède, égal à

$$ab' + ba' - \gamma'(a+b).$$

Parmi ces couples, il en existe encore qui se composent de deux points très-voisins x, y, et qui, en tant que ces points coïncident, occasionnent une nouvelle réduction du nombre indiqué lorsque l'on fait rétrograder la déformation de φ en π. Il s'agit de trouver ces couples.

Nous considérerons en particulier un point de coïncidence G de la correspondance φ', c'est-à-dire un point où sont réunis $\gamma'+1$ points $x = y$ de φ'. Tandis que le point x se rapproche du point G, le point y qui doit ensuite coïncider avec lui arrive dans le voisinage de x, se confond avec x lorsque x atteint G et s'éloigne de nouveau de x, si x s'éloigne de G. Donc, tandis que x passe par un point de coïncidence de φ', y parcourt tous les points de f voisins de x, l'un des points allant pour ainsi dire au-devant de l'autre et le dépassant ensuite. Mais parmi les points voisins de x sont compris aussi les γ points qui tirent leur origine du point de γ valeurs de φ, par suite de notre déformation. Donc, à chacun de ces γ points, si x passe par un point de coïncidence G de φ', doit répondre une fois le point y qui coïncide avec x. Pour tout point G, il se produit par là γ couples formés de points voisins x, y, qui satisfont en même temps aux correspondances φ' et π, et qui, la

déformation de φ cessant, appellent une réduction correspondante du nombre $ab' + ba' - \gamma' (a + b)$ [1].

Si donc C' *est le nombre des points de coïncidence de* φ', il reste

$$(8) \qquad (\varphi\varphi') = ab' + ba' - \gamma'(a + b) - \gamma C'$$

couples de points x, y ayant une situation séparée qui satisfont simultanément aux correspondances φ et φ'.

Nous procédons maintenant dissymétriquement en déformant l'une des correspondances φ; si à la place nous avions déformé φ', nous aurions obtenu la formule

$$(9) \qquad (\varphi\varphi') = a'b + b'a - \gamma(a' + b') - \gamma' C,$$

C désignant le nombre des points de coïncidence de la correspondance φ. Comme les deux valeurs données pour $(\varphi\varphi')$ doivent être égales l'une à l'autre, on obtient par comparaison

$$(10) \qquad \frac{C - (a - \gamma) - (b - \gamma)}{\gamma} = \frac{C' - (a' - \gamma') - (b' - \gamma')}{\gamma'}.$$

Ce quotient a pour φ la même forme que pour φ' et doit, par suite, être complétement indépendant de la nature spéciale de la correspondance; il peut être déterminé par une correspondance à l'égard de laquelle le nombre C est connu par une autre voie. Prenons, par exemple, la correspondance entre le point de contact y d'une tangente de C_n et ses autres $n - 2$ points d'intersection x avec C_n pour laquelle C est égal au nombre des points d'inflexion de f, et par conséquent à $3n(n - 2)$. Ici nous avons

$$a = n, \quad b = n(n - 1), \quad \gamma = 2,$$

et conséquemment la valeur du quotient sera égale à $(n - 1)(n - 2)$, égale à $2p$. On a donc la *formule de correspondance*

$$(11) \qquad C = (a - \gamma) + (b - \gamma) + 2\gamma p,$$

---

[1] Les conclusions du texte ne sont établies que pour des points réels. Mais on peut procéder algébriquement, ce qui résout aussi le cas imaginaire. *Voir* BRILL, *Math. Annalen*, t. VI (*loc. cit.*).

et ensuite, par substitution,

$$(\varphi\varphi') = (a-\gamma)(b'-\gamma') + (b-\gamma)(a'-\gamma') - 2p\gamma\gamma'.$$

Si l'on pose encore

$$a-\gamma=\alpha, \qquad a'-\gamma'=\alpha',$$
$$b-\gamma=\beta, \qquad b'-\gamma'=\beta',$$

α étant le nombre des points x correspondant au point y en vertu de la correspondance φ et non confondus avec y, et ainsi de suite, nous avons ce théorème [1] :

Le nombre des points de coïncidence d'une correspondance $\varphi = (\alpha, \beta)_\gamma$ sur une courbe du genre p (d'abord supposée sans point doubles, etc.) est

(12) $$C = \alpha + \beta + 2p\gamma,$$

et le nombre des couples de points x, y satisfaisant en même temps aux deux correspondances $\varphi = (\alpha, \beta)_\gamma$, $\varphi' = (\alpha', \beta')_{\gamma'}$ est

(13) $$(\varphi\varphi') = \alpha\beta' + \beta\alpha' - 2p\gamma\gamma'.$$

Mais on ne doit prendre encore que la *moitié* de ce nombre si φ et φ' ont une relation complétement *symétrique*, ainsi qu'il a déjà été fait plus haut pour le cas de $\gamma = \gamma' = 0$.

Nous nous posons maintenant la question de savoir comment les points de coïncidence d'une correspondance peuvent être déterminés algébriquement par un procédé éliminatoire. Nous montrerons en particulier qu'il est toujours possible d'obtenir une courbe découpant sur f les points C de coïncidence, que, par conséquent, *les points de coïncidence forment toujours le système complet des intersections de f avec une autre courbe.* Nous pouvons d'abord former explicitement cette courbe pour les cas les plus simples de $\gamma = 1$ et $\gamma = 2$; pour $\gamma = 0$, elle est donnée directement par $\varphi\left(\overset{r}{x}, \overset{s}{x}\right) = 0$.

---

(1) Observons spécialement que les formules trouvées, d'après le raisonnement qui a servi à les obtenir, ne peuvent être employées que si la correspondance entre les points x et y est représentable par une équation $\varphi = 0$, c'est-à-dire si les $a = \alpha + \gamma$ points qui répondent à y aussi bien que les $b = \beta + \gamma$ points qui répondent à x son déterminés par les intersections d'une courbe mobile.

Soit donc d'abord $\gamma = 1$. Nous poserons symboliquement

(14) $$f = a_x^n = b_x^n = \ldots, \quad \varphi = \alpha_x^r \beta_y^s = \alpha_x'^r \beta_y'^s = \ldots,$$

de telle sorte que dans φ les r symboles α acquièrent une signification effective conjointement avec les s symboles β. D'après l'hypothèse, nous avons

(15) $$\alpha_x^r \beta_x^s = 0 \quad (\text{éventuellement en vertu de } f = 0),$$

et pour $y = x + dx$ on doit avoir

(16) $$\alpha_x^r \beta_x^{s-1} \beta_{dx} = 0, \quad a_x^{n-1} a_{dx} = 0.$$

Pour pouvoir éliminer les différentielles dx d'une façon symétrique, observons qu'entre les x_i, pour leur attribuer une valeur absolue, on peut toujours supposer une équation de la forme

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 = 1,$$

les quantités k_i désignant des constantes. De là résulte alors, comme troisième équation,

(17) $$k_1 dx_1 + k_2 dx_2 + k_3 dx_3 = 0.$$

Entre cette dernière et les équations (16) on peut actuellement éliminer les dx, et l'on trouve la condition

(18) $$(a\beta k)\, a_x^{n-1} \alpha_x^r \beta_x^{s-1} = 0.$$

Mais, au lieu de (16), on aurait pu aussi prendre pour base les équations

(19) $$\alpha_x^{r-1} \beta_x^s \alpha_{dx} = 0, \quad a_x^{n-1} a_{dx} = 0;$$

on a donc par conséquent aussi

(20) $$(a\alpha k)\, a_x^{n-1} \alpha_x^{r-1} \beta_x^s = 0.$$

Nous chasserons les k_i en faisant usage de l'identité (t. I, p. 352)

$$(a\alpha k)\, \beta_x = (a\beta k)\, \alpha_x + (\beta\alpha k)\, a_x + (a\alpha\beta)\, k_x,$$

car, à cause de (18) et à cause de $f = 0$, (20) se transforme alors, à part un facteur constant k_x, en

(21) $$(a\alpha\beta)\, \alpha_x^{r-1} \beta_x^{s-1} a_x^{n-1} = 0,$$

et *cette équation représente la courbe cherchée*. Le nombre de ses points d'intersection avec f est en fait égal à

$$nr + ns + n(n-3) = nr - 1 + ns - 1 + 2p.$$

Soit en second lieu $\gamma = 2$. Cette circonstance peut d'abord provenir de ce que la courbe qui répond à x a un point double en x, la courbe qui répond à y ayant de même un point double en y; on a alors, indépendamment des z,

$$(22) \qquad \alpha_x^r \beta_x^{s-1} \beta_z \equiv 0, \quad \alpha_x^{r-1} \beta_x^s \alpha_z \equiv 0.$$

Nous cherchons les points x dans lesquels une branche du point double touche la courbe f, c'est-à-dire dans lesquels on a

$$(23) \qquad \alpha_x^r \beta_x^{s-2} \beta_{dx}^2 = 0, \quad a_x^{n-1} a_{dx} = 0.$$

L'élimination des dx entre ces équations et (17) donne

$$(24) \qquad (\beta a k)(\beta b k) \alpha_x^r \beta_x^{s-2} a_x^{n-1} b_x^{n-1} = 0.$$

Mais, au lieu de (23), on aurait pu aussi prendre pour base les équations

$$(25) \qquad \alpha_x^{r-2} \alpha_{dx}^2 \beta_x^s = 0, \quad a_x^{n-1} a_{dx} = 0;$$

on a donc aussi

$$(26) \qquad (\alpha a k)(\alpha b k) \alpha_x^{r-2} \beta_x^s a_x^{n-1} b_x^{n-1} = 0.$$

Remarquons, d'ailleurs, que les équations (18), (20) et (21) elles-mêmes sont satisfaites, en vertu de (22), pour tout point x placé sur f. Pour chasser les k_i de (24), nous emploierons les identités

$$(\beta a k)\alpha_x = (\beta a \alpha) k_x + (\beta \alpha k) a_x + (\alpha a k) \beta_x,$$
$$(\beta b k)\alpha_x = (\beta b \alpha) k_x + (\beta \alpha k) b_x + (\alpha b k) \beta_x.$$

Dans l'expression obtenue, les termes multipliés par les facteurs a_x, b_x s'évanouissent à cause de $f = 0$, le terme en β_x^2 en vertu de (26); il reste un terme multiplié par k_x^2 et deux termes multipliés par $k_x \beta_x$. Ces derniers, en vertu de la permutabilité de a et de b sont, à un facteur commun près,

$$(\alpha a k)(\beta b \alpha)\beta_x + (\beta a \alpha)(\alpha b k)\beta_x = 2(\alpha a k)(\beta b \alpha)\beta_x.$$

Pour le terme qui figure dans le second membre, employons l'identité

$$(\alpha a k) b_x = (\alpha a b) k_x + (\alpha b k) a_x + (b a k) \alpha_x.$$

Dans l'expression obtenue, le second terme s'évanouit en vertu de $f = 0$, le troisième en vertu des équations (22). L'expression (24) se transforme donc, abstraction faite du facteur k_x^2, en

$$P = (\alpha\beta b)[(\alpha\beta a) b_x + 2(\alpha a b)\beta_x]\alpha_x^{r-2}\beta_x^{s-2} b_x^{n-2} a_x^{n-1}.$$

Nous pouvons écrire celle-ci encore plus symétriquement; on a en effet

$$(\alpha a b)\beta_x = (\alpha\beta b) a_x + (\beta a b)\alpha_x + (\alpha a \beta) b_x,$$

et par suite, les autres termes disparaissant,

$$P = (\alpha\beta b)[(\alpha a b)\beta_x + (\beta a b)\alpha_x] a_x^{n-1} b_x^{n-2} \alpha_x^{r-2}\beta_x^{s-2}.$$

Nous pouvons permuter encore ici a et b et former la somme des deux expressions. A la place de $(\alpha\beta b) a_x$ intervient alors le facteur

$$\frac{1}{2}[(\alpha\beta b) a_x - (\alpha\beta a) b_x] = \frac{1}{2}[(\alpha a b)\beta_x - (\beta a b)\alpha_x].$$

L'équation de la courbe cherchée est donc finalement

(27) $$2P \equiv [(\alpha a b)^2 \beta_x^2 - (\beta a b)^2 \alpha_x^2]\alpha_x^{r-2}\beta_x^{s-2} a_x^{n-2} b_x^{n-2} = 0.$$

Le nombre des points de coïncidence qu'elle découpe sur $f = 0$ concorde avec celui qui a été trouvé plus haut.

Nous obtiendrons une autre courbe du même ordre dans la supposition que le point de deux valeurs en $x = y$ prenne naissance par contact. Dans ce cas, à la place de (22) interviennent les équations

(28) $$\alpha_x^r \beta_x^{s-1}\beta_{dx} = 0, \quad \alpha_x^{r-1}\beta_x^s \alpha_{dx} = 0,$$

et à la place de (23) les conditions

(29) $$\alpha_x^r \beta_x^{s-1}\beta_{d^2x} + (s-1)\alpha_x^r \beta_x^{s-2}\beta_{dx}^2 = 0,$$

(30) $$a_x^{n-1} a_{d^2x} + (n-1) a_x^{n-2} a_{dx}^2 = 0,$$

(31) $$k_1 d^2 x_1 + k_2 d^2 x_2 + k_3 d^2 x_3 = 0,$$

tandis que les équations (18), (20), (21) sont satisfaites pour tout point de f. On peut ici imaginer que les dx_i aient été calculés au moyen de (29) et (30) en fonction des d^2x_i, porter leurs valeurs dans $a_x^{n-1}a_{dx} = 0$ et dans l'une des équations (28), et entre ces deux équations réunies à (31) éliminer les d^2x_i. Toutefois, l'élimination se fait plus symétriquement de la manière suivante.

On ajoutera l'équation qui intervient à la place de (19), savoir

$$(32) \qquad \alpha_x'^{r-1}\alpha'_{d^2x}\beta_x'^s + (r-1)\alpha_x'^{r-2}\alpha'^2_{dx}\beta_x'^s = 0,$$

et l'on éliminera entre elle et entre (29), (30) et (31) les grandeurs d^2x_i. Cela donne le résultat

$$0 = \begin{vmatrix} \beta_1\beta_x & \beta_2\beta_x & \beta_3\beta_x & (s-1)\beta^2_{dx} \\ \alpha'_1\alpha'_x & \alpha'_2\alpha'_x & \alpha'_3\alpha'_x & (r-1)\alpha'^2_{dx} \\ a_1a_x & a_2a_x & a_3a_x & (n-1)a^2_{dx} \\ k_1 & k_2 & k_3 & 0 \end{vmatrix} \alpha_x^r\beta_x^{s-2}\alpha_x'^{r-2}\beta_x'^s a_x^{n-2}.$$

Nous développerons ce déterminant suivant les termes de la dernière ligne verticale. Alors, en premier lieu, à cause des équations (18) et (20), tous les termes sont nuls séparément; mais le terme multiplié par le facteur $a_x^{n-2}a^2_{dx}$ est doublement nul. Ce dernier est, en effet, égal à

$$(n-1)(\beta\alpha'k)a^2_{dx}.\alpha_x^r\beta_x^{s-1}\alpha_x'^{r-1}\beta_x'^s a_x^{n-2},$$

et, par application de l'identité

$$(\beta\alpha'k)a_{dx} = (\beta\alpha'a)k_{dx} + (\beta ak)\alpha'_{dx} + (a\alpha'k)\beta_{dx},$$

il en résulte une somme dont les termes séparés sont chacun doublement nuls. Pour les deux derniers termes, cela résulte immédiatement des équations (18), (20) et (28); le premier terme renferme le facteur nul k_{dx}, et l'évanouissement de l'autre facteur s'obtient par élimination des dx_i entre (28) et $a_x^{n-1}a_{dx} = 0$. Nous pouvons donc laisser de côté le terme qui a $a_x^{n-2}a^2_{dx}$ comme facteur vis-à-vis des deux autres termes du déterminant; ce dernier se réduit, par suite, à la somme

$$(33) \quad [(s-1)(\alpha'ak)\alpha'_x\beta^2_{dx} - (r-1)(\beta ak)\beta_x\alpha'^2_{dx}]\alpha_x^r\beta_x^{s-2}\alpha_x'^{r-2}\beta_x'^s a_x^{n-1}.$$

Les remarques suivantes servent à la transformation de cette

somme. A chaque point x correspondent, d'après notre hypothèse, les points x et $x+dx$; réciproquement, au point $x+dx$ doivent de nouveau correspondre les points $x+dx$ et x, c'est-à-dire qu'*en même temps que* (28) *a lieu encore l'équation*

$$(34) \qquad \alpha_x^{r-1}\alpha_{dx}\beta_x^{s-1}\beta_{dx}=0.$$

Comme d'ailleurs dans notre cas, ainsi qu'il a été observé plus haut (p. 154), l'expression $\alpha_x^r\beta_x^s$ est identiquement nulle ou renferme le facteur f, on a aussi, en vertu de $f=0$ et $df=0$,

$$(35) \qquad s\alpha_x^r\beta_x^{s-1}\beta_{dx}+r\alpha_x^{r-1}\beta_x^s\alpha_{dx}=0,$$

ou, à cause de $a_x^{n-1}a_{dx}=0$, $k_{dx}=0$,

$$s(\beta ak)\alpha_x^r\beta_x^{s-1}a_x^{n-1}=-r(\alpha ak)\alpha_x^{r-1}\beta_x^s a_x^{n-1}.$$

En conséquence de cette équation, on peut séparer de (33) un facteur commun nul. Si l'on permute encore dans le second terme les lettres accentuées avec les non accentuées, on obtient par suite, *comme résultat de l'élimination des* d^2x_i *entre* (29), (30), (31),

$$(36) \qquad [s(s-1)\beta_{dx}^2\alpha_x^2+r(r-1)\alpha_{dx}^2\beta_x^2]\alpha_x^{r-2}\beta_x^{s-2}=0.$$

L'élimination des dx_i entre cette équation et entre $a_x^{n-1}a_{dx}=0$, $k_{dx}=0$ donne donc

$$\begin{aligned}0=[&s(s-1)(\beta ak)(\beta bk)\alpha_x^2\\ &+r(r-1)(\alpha ak)(\alpha bk)\beta_x^2]\alpha_x^{r-2}\beta_x^{s-2}a_x^{n-1}b_x^{n-1},\end{aligned}$$

ou, comme nous l'écrirons en abrégé,

$$(37) \qquad s(s-1)\Pi_1+r(r-1)\Pi_2=0.$$

Pour chasser les k_i employons dans le premier membre les identités

$$\begin{aligned}(\beta ak)\alpha_x&=(\beta a\alpha)k_x+(\beta\alpha k)a_x+(\alpha ak)\beta_x,\\ (\beta bk)\alpha_x&=(\beta b\alpha)k_x+(\beta\alpha k)b_x+(\alpha bk)\beta_x.\end{aligned}$$

Il vient alors, en vertu de $f=0$,

$$\Pi_1=(\alpha\beta a)(\alpha\beta b)\alpha_x^{-\ 2}\beta_x^{s-2}a_x^{n-1}b_x^{n-1}k_x^2+\Pi_2+2k_x\Pi_3,$$

si $\Pi_3=(\beta a\alpha)(\alpha bk)\alpha_x^{r-2}\beta_x^{s-1}a_x^{n-1}b_x^{n-1}$.

Nous pouvons encore transformer la dernière expression au

moyen de l'identité

$$(\beta a \alpha) k_x = (\beta a k) \alpha_x - (\beta \alpha k) a_x - (\alpha a k) \beta_x.$$

Des trois termes qui prennent naissance, le premier disparaît en vertu de (34), le second en vertu de $f = 0$; le troisième est égal à $-\Pi_2$, et, par conséquent, il vient, si S désigne le facteur de k_x^2,

$$(38) \qquad \Pi_1 + \Pi_2 = S k_x^2.$$

Pour former aussi la différence $\Pi_1 - \Pi_2$, nous emploierons pour Π_1 l'identité suivante (IV, t. I, p. 352) :

$$2(\beta a k)(\beta b k) a_x b_x = (\beta a k)^2 b_x^2 + (\beta b k)^2 a_x^2 - (a b k)^2 \beta_x^2 \\ - (a b \beta)^2 k_x^2 + 2(\beta a b)(a b k) k_x \beta_x.$$

Si l'on porte ceci dans Π_1, il ne reste plus que les deux derniers termes de la somme qui figure dans le second membre. L'expression Π_1, au facteur près $\alpha_x^{r-2} \beta_x^{s-2} a_x^{n-2} b_x^{n-2}$, devient donc égale à

$$-\frac{1}{2}(a b \beta)^2 \alpha_x^2 k_x^2 + (\beta a b)(a b k) \beta_x \alpha_x^2 k_x,$$

et de même Π_2, à part le même facteur, est égal à

$$-\frac{1}{2}(a b \alpha)^2 \beta_x . k_x^2 + (\alpha a b)(a b k) \alpha_x \beta_x^2 k_x.$$

Dans la formation de la différence, nous emploierons pour les deux termes l'identité

$$(\beta a b) \alpha_x - (\alpha a b) \beta_x = (\alpha \beta a) b_x - (\alpha \beta b) a_x.$$

A cause de la permutabilité de a, b, et à cause du facteur (abk), nous pouvons écrire, pour la différence qui figure dans le second membre, $2(\alpha\beta a) b_x$. Nous désignerons pour l'instant le facteur ainsi transformé de k_x dans $\Pi_1 - \Pi_2$ par $2X$. Ce facteur peut se ramener à Π_1 et Π_2.

La forme $(\alpha\beta a) \alpha_x^{r-1} \beta_x^{s-1} a_x^{n-1}$ est en effet identiquement nulle dans notre cas ou a $f = a_x^n$ pour facteur; on a donc également, en toute hypothèse, en vertu de $f = 0$ et $df = 0$,

$$(\alpha\beta a) \alpha_x^{r-2} \beta_x^{s-2} a_x^{n-2} [(r-1) \beta_x a_x \alpha_{dx} \\ + (s-1) \alpha_x a_x \beta_{dx} + (n-1) \alpha_x \beta_x a_{dx}] = 0.$$

Or, si nous remplaçons dans cette équation les dx_i par les déterminants mineurs $(bk)_i b_x^{n-1}$, le coefficient de $(n-1)$ devient précisément égal à la forme X ci-dessus; le coefficient de $(r-1)$, d'autre part, devient égal à l'expression désignée plus haut par Π_1, et, par suite, son produit par k_x égal à $-\Pi_2$ et, d'une manière analogue, le coefficient de $(s-1)$ sera égal à $+\Pi_1$ au facteur près k_x. Nous avons d'après cela la relation

$$(n-1)k_x X = (r-1)\Pi_2 - (s-1)\Pi_1.$$

Si nous portons ceci dans l'expression trouvée pour $\Pi_1 - \Pi_2$, et que nous désignions les coefficients de $\frac{1}{2}k_x^2$ dans Π_1 par T_1, dans Π_2 par T_2, il en résulte

$$(n-1)(\Pi_1 - \Pi_2) = \frac{1}{2}k_x^2(n-1)(T_2 - T_1) + 2(r-1)\Pi_2 - 2(s-1)\Pi_1$$

ou

$$(39)\quad 2(2s+n-3)\Pi_1 - 2(2r+n-3)\Pi_2 = k_x^2(n-1)(T_2 - T_1).$$

Cette équation, conjointement avec (28), donne les résultats suivants :

$$4(r+s+n-3)\Pi_1 = k_x^2[2(2r+n-3)S + (n-1)(T_2 - T_1)],$$
$$4(r+s+n-3)\Pi_2 = k_x^2[2(2s+n-3)S - (n-1)(T_2 - T_1)].$$

La séparation du facteur k_x^2 de l'équation (37) est en conséquence accomplie. *L'équation de la courbe cherchée qui découpe sur $f=0$ les points de coïncidence de la correspondance $a_x^r \beta_x^s = 0$ est par suite*

$$(40)\left\{\begin{aligned} &2S[s(s-1)(2r+n-3) + r(r-1)(2s+n-3)] \\ &\qquad + T(n-1)[r(r-1) - s(s-1)] = 0, \end{aligned}\right.$$

S, $T = T_1 - T_2$ étant définis de la manière suivante :

$$S = (a\alpha\beta)(b\alpha\beta)\alpha_x^{r-2}\beta_x^{s-2}a_x^{n-1}b_x^{n-1},$$
$$T = (ab\beta)^2\alpha_x^r\beta_x^{s-2}a_x^{n-2}b_x^{n-2} - (ab\alpha)^2\alpha_x^{r-2}\beta_x^s a_x^{n-2}b_x^{n-2}.$$

On voit clairement par ces exemples comment on a à procéder dans le cas général. On pourra, en ayant égard aux équations $k_{d_i} = 0$, au moyen d'un procédé analogue au précédent,

dans lequel les symboles α et β de la fonction $\varphi = \alpha_x^r \beta_x^s$ sont employés symétriquement, éliminer successivement entre les équations qui définissent le point de γ valeurs de la correspondance en $x=y$ les différentielles des divers ordres, que ce dernier point provienne d'un point multiple des courbes φ en cet endroit, ou d'un contact multiple de cette courbe avec f, ou de la présence simultanée de ces deux circonstances. On a alors à séparer toujours du résultat final comme précédemment, au moyen de transformations identiques, une puissance de k_x comme facteur, pour obtenir enfin l'équation de la courbe qui détermine sur f les points de coïncidence. Mais nous pouvons, du reste, indiquer l'*ordre de cette courbe* sans examen détaillé des opérations algébriques dont il s'agit, parce que nous connaissons, d'après la formule (11), le nombre de ses points d'intersection avec f; ce nombre est ($a = rn, b = sn$) égal à

$$(41) \qquad [r+s+\gamma(n-3)].$$

Le nombre dont nous parlons reste le même si f possède des points doubles ou multiples, car les opérations algébriques indiquées restent toujours réalisables. D'un autre côté, le raisonnement qui nous conduit à l'établissement du nombre $C = \alpha + \beta + 2\gamma p$ n'est pas modifié par la présence de points multiples sur f, au moins si les diverses branches du point multiple ont toutes un cours séparé ([1]). Dans ce cas, le nombre C devient plus petit que le nombre des points d'intersection de la courbe précédente avec $f=0$. Cela s'explique par la circonstance que cette courbe passe par les points multiples de f, que, par conséquent, en ces points des coïncidences se produisent sans que les points coïncidents soient situés l'un près de l'autre sur la même branche de courbe, ainsi que cela deviendra bientôt plus clair; or, pour les coïncidences de cette espèce, nos conclusions géométriques cessent d'être vraies. D'après cela nous ferons les distinctions

([1]) Dans la correspondance employée ci-dessus à la détermination du nombre des points d'inflexion (p. 152) se présente encore cette particularité que les courbes φ (les premières polaires) ont aux points multiples des points *fixes communs*. Pour éviter les difficultés qui résultent de là (difficultés sur lesquelles nous reviendrons plus tard), on peut choisir un autre exemple, par exemple la correspondance $(n-1, n-1)_1$, qui est déterminée par les lignes d'un faisceau de rayons sur $f=0$.

suivantes : *Nous appellerons* coïncidence proprement dite *toute coïncidence qui prend naissance parce qu'un des α points mobiles correspondant à un point y est situé infiniment près de ce point sur la même branche de courbe,* et coïncidence improprement dite *celle qui se trouve dans le cas contraire.* D'après ce qui précède, en conséquence de cette définition, on a la proposition que *les coïncidences improprement dites réunies aux coïncidences proprement dites forment sur $f = 0$ un système complet de points d'intersection.* Si donc nous désignons par G le nombre des premières, le nombre

$$C + G = nr - \gamma + ns - \gamma + \gamma[(n-1)(n-2) - 2d] + G,$$

d indiquant le nombre des points doubles de $f = 0$, doit être divisible par n, c'est-à-dire que l'on a $G = 2\gamma d$.

Dans tout point double de f tombent par conséquent 2γ *coïncidences improprement dites, et il y en a de même* $\gamma i(i-1)$ *dans tout point multiple d'ordre i à tangentes séparées.*

En effet, pour $\gamma = 1$, le premier membre de (21) est nul au degré $i-1$ de multiplicité en tout point de f multiple d'ordre i. Pour reconnaître ce fait dans (27), il suffit d'observer à l'égard d'un point double x de f que l'expression $(abu)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2}$ devient en un tel point proportionnelle à u_x^2.

On peut se rendre compte directement et ainsi qu'il suit de la manière dont se comporte aux points singuliers de f la courbe qui traverse les points de coïncidence (¹), courbe que nous appellerons brièvement dans ce qui suit *courbe de coïncidence,* au cas où les courbes φ correspondant à x ont en $x = y$ un point multiple d'ordre γ. Si x s'approche d'un point double de f sur l'une des branches de cette courbe (avec laquelle la courbe correspondante φ a toujours γ points d'intersection en $x = y$), la courbe φ, lorsque x arrivera au point double, possédera encore en $x\gamma$ autres points d'intersection avec l'autre branche de f passant par le point double, en sorte qu'il se présente γ coïncidences improprement dites. La même chose a lieu si x arrive au point double sur cette

(¹) Le fait que ce mot a été employé dans un autre sens (p. 109) ne peut donner lieu à aucune méprise.

autre branche, et nous avons en fait 2γ coïncidences improprement dites réunies, comme cela doit être.

Considérons ensuite le cas où le point de γ valeurs en $x = y$ prend naissance par contact. Ici nous pouvons toujours nous figurer les courbes φ qui correspondent aux points x comme dérivant d'une variété doublement infinie de courbes du $s^{\text{ième}}$ ordre, dont chacune rencontre la courbe $f = 0$ en $\gamma - 1$ points consécutifs, précisément par la condition qu'une telle courbe ait encore un point voisin en commun avec f. Alors à chaque point x correspondent les autres $ns - \gamma$ points simples d'intersection y d'une courbe de cette espèce avec f, points dont aucun en général n'est situé aux points doubles. D'autre part, par tout point y passe un nombre simplement infini de courbes appartenant au système doublement infini dont il vient d'être parlé, courbes dont chacune rencontre la courbe f en $\gamma - 1$ points voisins, et cela en un point non situé en y; mais parmi elles figurera un nombre fini de courbes coupant f en γ points voisins. Au point y correspond donc une courbe qui traverse les points de contact ainsi signalés de la courbe mentionnée en dernier lieu, c'est-à-dire la courbe de coïncidence (p. 162) d'une correspondance à point de $\gamma - 1$ valeurs. Or, une correspondance de cette espèce a, comme nous le verrons incessamment, $\gamma(\gamma - 1)$ coïncidences improprement dites en tout point double de f, et, par conséquent, en chacun se trouvent $\gamma(\gamma - 1)$ points d'intersection de la courbe qui correspond à y. *Si donc une correspondance a en $x = y$ un point de γ valeurs provenant d'un contact du $(\gamma - 1)^{\text{ième}}$ ordre, et si les courbes qui correspondent à x ne passent pas par les points doubles de f, néanmoins, pour chaque courbe appartenant à un point y, $\gamma(\gamma - 1)$ points d'intersection coïncident avec chaque point double de f; autrement dit, nous avons une correspondance à points* fixes.

Nous avons pour le moment exclu de notre examen les correspondances de cette nature. Relativement à elles, nous démontrerons plus tard [1] le théorème suivant, dont, en attendant, nous ferons itérativement usage et que nous énonçons ici pour ce motif:

Si dans une correspondance ayant un point de γ valeurs

---

[1] *Voir* la Section relative aux transformations univoques, t. III de ces Leçons.

en $x=y$ il y a, en un point simple fixe de f, σ points d'intersection pour chacune des courbes qui correspondent à x et τ points d'intersection pour chacune des courbes qui correspondent à y, il y aura en ce point $\sigma+\tau$ coïncidences improprement dites, et, si le point fixe est un point double de f, il y a en ce point $\sigma+\tau+2\gamma$ coïncidences improprement dites. Les coïncidences proprement dites, au contraire, se déterminent encore par la formule (12), *pourvu que l'on entende par α, β les nombres des points mobiles qui répondent à x ou à y.*

Nous supposerons maintenant que σ points d'intersection des courbes qui correspondent à x soient situés en un point double. Alors, γ étant égal à 2 (par contact en x), la courbe qui correspond à y se détermine, de la manière décrite, comme courbe de coïncidence d'une correspondance dans laquelle $\gamma=1$, $\sigma=\sigma$ et aussi $\tau=\sigma$. Mais, pour celle-ci, $\sigma+\tau+2\gamma=+2(\sigma+1)$ coïncidences improprement dites sont situées au point double; autrement dit, dans la correspondance où $\gamma=2$, $2(\sigma+1)$ points d'intersection de la courbe qui correspond à y sont situés au point double. Nous avons par conséquent ici $\sigma=\sigma$, $\tau=2(\sigma+1)$, et, par suite, le nombre u des coïncidences improprement dites devient $u=3(\sigma+2)$. Pour une correspondance où $\gamma=3$, il en résulte $\sigma=\sigma$, $\tau=3(\sigma+2)$, d'où $u=4(\sigma+3)$. En continuant cette manière de raisonner (et concluant de γ à $\gamma+1$), on trouve plus généralement, si l'on donne $\sigma=\sigma$,

$$\tau=\gamma(\sigma+\gamma-1),\quad u=\sigma+\tau+2\gamma=(\gamma+1)(\sigma+\gamma).$$

Si donc, dans une correspondance à point de γ valeurs en $x=y$, pour la courbe correspondante à x qui a en x un contact du $(\gamma-1)^{ième}$ ordre, σ points d'intersection fixes tombent en un point double de f, il y a en ce point, pour chaque courbe correspondant à y, $\gamma(\sigma+\gamma-1)$ points d'intersection fixes, et il s'y trouve $(\gamma+1),(\sigma+\gamma)$ coïncidences improprement dites. Pour $\sigma=0$, en résulte le théorème énoncé plus haut; on démontre aussi de même le suivant : *Si dans la correspondance citée pour la courbe correspondant à x, σ points d'intersection tombent en un point simple fixe de f, il y a en ce point $\gamma\sigma$ points d'intersection fixes pour chaque courbe correspondant à y et $(\gamma+1)\sigma$ coïncidences improprement dites.*

Si d'un autre côté nous faisons arriver le point x à un point double de f, il ne lui correspondra d'abord aucune courbe déterminée, puisque l'expression $\varphi(x, y)$ *devient nulle indépendamment des* y. On obtient donc une courbe déterminée seulement si l'on fait un choix entre les deux directions d'avancement possibles de x sur f et si en conformité l'on pose $x + dx$ à la place de x dans $\varphi(x, y)$. *Au point double comme point x correspondent donc deux courbes complétement différentes, dont chacune a un contact du* $(\gamma - 1)^{ième}$ *ordre avec une branche de f.* Quelques exemples pourront servir à éclaircir la chose.

On demande d'indiquer la correspondance $\varphi = 0$ en vertu de laquelle à tout point x répond celle des courbes d'un réseau du $m^{ième}$ ordre qui touche en ce point la courbe $f = 0$. Soient $\alpha_x^m = 0$, $\alpha_x'^m = 0$, $\alpha_x''^m = 0$ trois courbes quelconques du réseau; il faut d'abord éliminer $\varkappa, \lambda, \mu$ entre les trois équations

$$\begin{aligned} &\varkappa\alpha_x^m + \lambda\alpha_x'^m + \mu\alpha_x''^m = 0,\\ &\varkappa\alpha_y^m + \lambda\alpha_y'^m + \mu\alpha_y''^m = 0,\\ &\varkappa\alpha_x^{m-1}\alpha_{dx} + \lambda\alpha_x'^{m-1}\alpha'_{dx} + \mu\alpha_x''^{m-1}\alpha''_{dx} = 0, \end{aligned}$$

puis éliminer du résultat les quantités dx_i au moyen des relations $a_x^{n-1}a_{dx} = 0$, $k_{dx} = 0$. Au moyen de quelques transformations identiques, on a alors à séparer encore un facteur k_x pour obtenir enfin le résultat

$$\begin{aligned} a_x^{n-1}[(a\alpha'\alpha'')\alpha_x'^{m-1}\alpha_x''^{m-1}\alpha_y^m + (a\alpha''\alpha)\alpha_x''^{m-1}\alpha_x^{m-1}\alpha_y'^m \\ + (a\alpha\alpha')\alpha_x^{m-1}\alpha_x'^{m-1}\alpha_y''^m] = 0. \end{aligned}$$

On vérifie facilement aussi *a posteriori* l'exactitude du résultat. L'équation représente en effet, par rapport aux variables y, dans tous les cas, une courbe du réseau; si dans cette équation on pose $y = x$, il se sépare en fait, à cause de l'identité ([1])

$$(a\alpha'\alpha'')\alpha_x + (a\alpha\alpha')\alpha''_x + (a\alpha''\alpha)\alpha'_x = (\alpha\alpha'\alpha'')a_x,$$

([1]) Du théorème (p. 102) d'après lequel les courbes d'un réseau qui passent par un point de la jacobienne de ce réseau se touchent toutes en ce point, il résulte que la courbe φ qui répond à un point d'intersection x de la jacobienne avec f a en x un point double et non, par suite, un contact proprement dit; ce que l'on vérifie aussi directement.

un facteur a_x^n, et de même, si l'on pose $y = x + dx$, un facteur $a_x^{n-1} a_{dx}$, comme cela doit être. Mais l'équation peut être considérée comme une fonction linéaire des grandeurs $a_x^{n-1} a_i$, et de là résulte que *toute* courbe répondant à un point y passe nécessairement en fait par les points doubles de f, ainsi qu'il a été affirmé.

Il peut naturellement arriver aussi que le point de γ valeurs provienne de ce que la courbe φ a en $x = y$ un point multiple dont les branches individuelles ont avec la courbe un contact uni- ou multiponctuel. Ces cas peuvent être envisagés comme des combinaisons de ceux qui viennent d'être traités.

Faisons maintenant dégénérer le point double de f en un point de rebroussement. Alors les considérations précédentes conservent leur exactitude en tant qu'il s'agit des coïncidences improprement dites. Mais, dans un point de rebroussement, deux points confondus ensemble doivent toujours être considérés comme situés sur le *même* élément de courbe; donc, les coïncidences qui tombent en un point de cette nature doivent être partiellement considérées comme coïncidences proprement dites, de sorte que le nombre C dans (12) doit encore subir une réduction si l'on demande *le nombre des coïncidences proprement dites non situées aux points singuliers de f.* Nous donnons dans ce qui suit quelques exemples relativement à la détermination de cette réduction.

Admettons que les courbes φ aient en $x = y$ un point multiple d'ordre γ; il en sera de même si x est un point de rebroussement, et, en général, les tangentes du point multiple sont distinctes de la tangente de rebroussement. Le nombre des coïncidences proprement dites situées en x est alors évidemment indépendant de la correspondance spéciale et peut, pour le même nombre γ, être déterminé sur un exemple quelconque. Or, dans le voisinage de x, nous pouvons remplacer la courbe à point multiple d'ordre γ par ses γ tangentes. Il nous suffit donc de déterminer le nombre dont il s'agit pour le cas où les courbes φ qui répondent à x se décomposent en γ lignes droites. Considérons dans ce but la correspondance $[\gamma(n-1), \gamma(n-1)]_\gamma$, qui met en relation avec un point de f les $\gamma(n-1)$ intersections des tangentes que l'on peut mener de ce point à une courbe quelconque de classe γ. Le nombre des coïncidences proprement dites doit être égal au nombre des tangentes

communes des deux courbes, c'est-à-dire à

$$k\gamma = \gamma[n(n-1) - 2d - 3r],$$

k, d, r ayant à l'égard de la courbe f les significations connues. Mais notre formule de correspondance donne le nombre

$$C = 2\gamma(n-1) + 2\gamma p = \gamma[n(n-1) - 2d - 2r],$$

et nous avons ici à apporter encore une réduction de γr pour obtenir le nombre $k\gamma$. *Si donc le point de γ valeurs en $x = y$ prend naissance par suite d'un point multiple d'ordre γ des courbes φ, γ coïncidences proprement dites sont absorbées en chaque point de rebroussement.*

Si, au contraire, le point de γ valeurs prend naissance par contact, on peut encore, pour $\gamma = 2$, remplacer les courbes φ dans le voisinage de x par des lignes droites et déterminer au moyen des formules de Plücker la réduction qui survient alors. C'est plus tard seulement que nous traiterons le cas général (¹) dans la supposition où les courbes φ qui répondent à x sont séparées d'un système γ fois infini de courbes précisément par la condition du contact. Il paraît néanmoins difficile de donner des règles tout à fait générales. Ainsi, par exemple, des exceptions interviennent si les courbes φ qui répondent à x et celles qui répondent à y passent par un point de rebroussement de f, comme le montre l'exemple suivant.

Déterminer le nombre des tangentes que l'on peut mener d'un point de rebroussement à la courbe f. — Les points de contact sont les points de coïncidence d'une correspondance $(n-3, n-3)$, ayant un point fixe comptant doublement au point de rebroussement pour chaque courbe φ (c'est-à-dire pour les droites passant par le point de rebroussement). Le nombre des coïncidences proprement dites est, par conséquent, si d'ailleurs (pour abréger) on ne suppose pas d'autre point de rebroussement sur f (d'où $r = 1$), égal à

$$2n - 6 + 2p = k - 3.$$

D'un autre côté, ces points sont les points d'intersection avec f

(¹) *Voir* la fin de cette Section.

de la première polaire du point de rebroussement non situés aux points doubles de f. Mais, pour celle-ci, six points d'intersection avec f sont situés au point de rebroussement, c'est-à-dire trois de plus que pour un pôle quelconque ; nous obtenons donc encore $k-3$ autres points d'intersection, et, par conséquent, il n'y a dans un point de rebroussement *aucune* coïncidence proprement dite.

Nous allons maintenant, dans ce qui suit, donner une série d'*exemples* et d'*applications de formules de correspondance*, et nous apprendrons à connaître en même temps différents théorèmes importants par eux-mêmes et une généralisation de notre formule de correspondance.

1° Comme exemple relatif à la formule (13) donnée pour $(\varphi\varphi')$, nous prendrons le suivant. Soit donné un faisceau simplement infini, coupant C_n en un certain nombre de points fixes et en M points mobiles parmi lesquels peuvent se trouver les points x et y : on demande de déterminer les couples de points d'intersection x, y qui sont pôles conjugués relativement à une conique fixe quelconque. Un couple de cette espèce doit satisfaire simultanément à la correspondance $\varphi=(M-1, M-1)_1$ entre les points d'intersection mobiles et à la correspondance $\varphi'=(n, n)_0$ entre un point y de C_n et les n points d'intersection x des polaires de y. On obtient, par suite,

$$\frac{1}{2}(\varphi\varphi')=n(M-1)$$

pour le nombre des couples cherchés $\left(\text{le facteur } \frac{1}{2} \text{ à cause de la symétrie}\right)$.

2° Nous allons faire à présent usage de la formule (12) pour parvenir au théorème déjà énoncé plus haut sur l'identité du genre de deux courbes liées l'une à l'autre par une relation à détermination unique. Nous poserons tout de suite en général cette question : Quelle est la dépendance du genre (p) d'une courbe C relativement au genre p' d'une courbe C' si ces deux courbes sont liées l'une à l'autre de telle manière qu'à tout point P de C correspondent x' points P' de C' et à tout point P' de C' x points P de C [1].

---

[1] *Voir*, pour ce qui suit, ZEUTHEN, *Nouvelle démonstration de théorèmes sur les*

Nous désignerons par y et y' le nombre des coïncidences de deux points qui correspondent respectivement sur C et C′ au même point de l'autre courbe, en ne comptant pas les coïncidences provenant des points doubles des courbes. Nous admettrons qu'il arrive z fois (sur chaque courbe) que *simultanément* deux points correspondant à un point P coïncident en P′ et que réciproquement deux des points correspondant à P′ soient confondus en P. Nous supposons d'ailleurs que les courbes C et C′ aient seulement des points doubles et pas de point de rebroussement. Actuellement, pour la détermination des points y et z sur C, nous avons une correspondance

$$[x'(x-1),\quad x'(x-1)]_{x'}.$$

A chaque point P de C correspondent en effet x' points P′ de C′, puis à chacun de ces points x points Q sur C dont l'un se confond avec P (ce qui fait en tout, par conséquent, x' points), et ainsi prend naissance la correspondance citée qui, en vertu de notre notation, a $y+2z$ points de coïncidence, car chacun des points z comme tel compte deux fois, en tant que deux points Q se confondent avec P. On a donc

$$y+2z=2x'(x-1)+2x'p,$$
$$y'+2z=2x(x'-1)+2xp',$$

d'où, par soustraction ([1]),

$$y-y'=2x'(p-1)-2x(p'-1).$$

Entre deux courbes telles qu'à un élément de la première répondent x éléments de la seconde et à un élément de la seconde x′ éléments de la première, dont l'une est du genre p, l'autre du genre p′, et qui ont respectivement y et y′ points de coïncidence,

séries de points correspondants sur deux courbes (*Math. Annalen*, t. III, p. 150). — Pour les considérations du texte, on doit supposer que la relation à détermination multiple des deux courbes est réalisée au moyen du système complet des intersections, car c'est à cette condition seulement que le principe de correspondance peut être appliqué tel quel. La démonstration donnée par Zeuthen à l'endroit cité est indépendante de cette supposition; le résultat est donc vrai d'une manière générale.

([1]) Les mêmes équations subsisteront, du reste, en cas de survenance de points de rebroussement, pourvu que par y ou y' on entende l'*ensemble des points de coïncidence proprement dits* (*voir* plus haut).

existe la relation (¹)

$$y - y' = 2x'(p-1) - 2x(p'-1).$$

Pour $x = x' = 1$, d'où $y = y' = 0$, nous avons en particulier $p = p'$, et l'on obtient le théorème suivant dont l'étude individuelle nous occupera encore plus tard :

Deux courbes liées l'une à l'autre par une relation à détermination unique appartiennent au même genre.

3° Nous pouvons ensuite, à l'aide de la formule de correspondance, répondre à la question de savoir quel est le nombre des courbes d'un système qui ont un contact d'ordre élevé en certains points avec une courbe f du genre p (²). Les correspondances que l'on rencontre alors sont toujours, d'après ce qui précède (p. 163), des correspondances à points fixes ; mais, dans la détermination des coïncidences proprement dites, d'après la règle donnée à l'endroit cité, il y a lieu de tenir compte seulement des points d'intersection mobiles des courbes $\varphi(x, y) = 0$ et $f = 0$. Donc, lorsque par la suite nous considérerons des systèmes de courbes dépendant linéairement de q paramètres, tous les points simples ou doubles de f peuvent individuellement être communs à toutes les courbes du système sans que nos formules en soient influencées ; car celles-ci apparaissent comme ne dépendant que du nombre M des points d'intersection mobiles. Nous supposons d'abord ici que f n'ait pas de points de rebroussement.

(¹) Si l'on prend en particulier $x' = 1$, d'où $y' = 0$ et $p = p'$, il vient

$$y' = 2(p-1) - 2x(p-1).$$

Or, puisque y est toujours nécessairement un nombre positif, on a aussi $x = 1$ (si d'ailleurs p est différent de 1) ; et de là résulte ce théorème : *Si deux courbes du même genre $p > 1$ ont entre elles une relation telle qu'à chaque point de la première corresponde un point de la seconde, cette relation est aussi réciproque.* A l'aide des principes de Riemann, Weber a aussi donné une démonstration directe de cette proposition (*Journal de Crelle*, t. 76, p. 345). — Le cas de $p = 1$ a besoin d'un éclaircissement spécial : il est relatif à la transformation des fonctions elliptiques.

(²) Les formules relatives à cette question (dans le cas de $r = 0$) ont d'abord été établies par DE JONQUIÈRES, *Sur les problèmes de contact des courbes algébriques* (*Journal de Crelle*, t. 66 ; 1866) ; elles ont été étendues aux courbes à points de rebroussement par CAYLEY, *Philosophical Transactions*, t. CLVIII, p. 109 ; 1868. *Voir* aussi BISCHOFF, *Journal de Crelle*, t. 56. Des démonstrations exactes de ces formules ont été données par BRILL, *Math. Annalen*, t. VI, p. 46.

Soit d'abord un faisceau de courbes ($q = 1$). Par tout point x de f passe une courbe de ce faisceau coupant f en $M - 1$ autres points y. Nous avons par suite une correspondance $(M - 1, M - 1)_1$; et le nombre α des courbes tangentes est

$$\alpha_1 = 2(M - 1) + 2p = 2(M + p - 1),$$

en ne comptant pas les courbes tangentes en des points *fixes* situés sur C_n [1].

Si nous prenons un réseau de courbes à M points d'intersection mobiles, d'où $q = 2$, il y a une courbe du système tangente en un point quelconque x de C_n, car une telle courbe est déterminée par deux points (ici successifs). Cette courbe découpe $M - 2$ points correspondants y. D'autre part, par tout point y passe un faisceau de courbes du réseau ayant $M - 1$ points d'intersection mobiles, et parmi elles, d'après ce qui a été dit plus haut, il y a $\alpha_1 - 2$ courbes tangentes; car le nombre α_1 se transforme en $\alpha_1 - 2$ si l'on remplace M par $M - 1$. Nous avons $\gamma = 2$, car il existe en outre deux courbes infiniment voisines et tangentes en y même. Nous trouvons ainsi entre les points de contact x et les autres points d'intersection y des courbes une correspondance

$$(M - 2, \quad \alpha_1 - 2)_2.$$

Il existe donc dans le réseau

$$\alpha_2 = M - 2 + \alpha_1 - 2 + 4p = 3(M + 2p - 2)$$

---

(1) L'équation du faisceau étant donnée par $a'^m_x + \lambda a''^m_x = 0$, la correspondance sur f est déterminée par

$$\varphi \equiv \alpha^m_x \beta^m_y \equiv a'^m_x a''^m_y - a''^m_x a'^m_y = 0.$$

Si maintenant on considère que, sous forme non symbolique,

$$m^2 n(a\alpha\beta)\alpha^{m-1}_x \beta^{m-1}_y a^{n-1}_x = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2 \partial y_3} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3 \partial y_2}\right)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3 \partial y_1} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial y_3}\right)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2 \partial y_1}\right)\frac{\partial f}{\partial x_3},$$

on voit que les points de coïncidence seront déterminés par la courbe (p. 154):

$$(aa'a'')a^{n-1}_x a'^{m-1}_x a''^{m-1}_x = 0.$$

courbes osculatrices (sécantes en trois points successifs) (¹). On peut d'une manière identique conclure de q à $q+1$, et l'on parvient à ce théorème :

Dans un système linéaire q fois infini de courbes coupant une courbe C_n sans point de rebroussement en M *points mobiles, il y a*

$$\alpha_q = (q+1)(M+qp-q)$$

courbes qui rencontrent C_n *en* $q+1$ *points voisins (ayant un contact d'ordre* q*).*

Si les courbes du système sont du $m^{\text{ième}}$ ordre et ne sont assujetties à aucune condition, nous avons en particulier à poser $M = nm$, $q = \frac{1}{2}m(m+3)$. Il existe donc, par exemple, sur une courbe C_n sans rebroussement,

$$12n + 30(p-1)$$

points dans lesquels une conique peut avoir un contact du cinquième ordre (²).

4° Pour déterminer ensuite le nombre des courbes d'un réseau qui touchent C_n en deux points séparés, il est nécessaire de généraliser d'une certaine manière la formule de correspondance. Nous avons jusqu'ici toujours supposé que les courbes $\varphi(x,y)=0$ n'avaient avec la courbe f, au point $x=y$, qu'une intersection comptant une seule fois. Or, il peut arriver que ces courbes soient par exemple tangentes en un point à un certain degré de multiplicité, et sécantes à un degré multiple dans les autres. Nous ne ferons que mentionner ici brièvement ces cas compliqués (³). On démontre d'abord (comme nous l'avons fait plus haut pour la formule $\gamma = \delta$) (p. 149) le théorème suivant :

Si, parmi les points mobiles y *correspondant à un point* x', *se*

(¹) Une courbe traversant les points d'osculation a été donnée par BRILL, *Math. Annalen*, t. III, p. 459. On pourra la déduire de l'équation 40 ci-dessus, p. 160, si l'on imagine la forme $\varphi(x,y)$ donnée comme à la page 147.

(²) Cayley a aussi fait connaître une courbe qui sépare ces points sur la courbe principale.

(³) *Voir* CAYLEY, *Comptes rendus*, t. LXII, 1866, et BRILL, *loc. cit.*

rencontre un point y' de i valeurs (c'est-à-dire un point dans lequel se trouvent réunis i points simples d'intersection), réciproquement le point x' se comporte parmi les points x qui correspondent à y' comme un point de i valeurs.

Si maintenant à un point x, dans une correspondance à point de γ valeurs en $x=y$ répondent en général β' points y' de i' valeurs (non situés en x), β'' points y'' de i'' valeurs, etc., d'où en tout

$$\beta=\beta' i' + \beta'' i'' + \beta''' i''' + \ldots$$

points y, on trouvera, d'après le théorème cité, pour chaque point $y^{(\rho)}$, un certain nombre $\alpha^{(\rho)}$ de points $x^{(\rho)}$ qui lui correspondent au degré de multiplicité ρ, de telle sorte que le nombre total des points x correspondant à un point y est égal à

$$\alpha=\alpha' i' + \alpha'' i'' + \alpha''' i''' + \ldots.$$

Le nombre des points de coïncidence de la correspondance (α, β) *qui prend ainsi naissance est, d'après la formule de correspondance* (12), $C=\alpha+\beta+2\gamma p$, *c'est-à-dire que l'on a la relation*

$$i'(C'-\alpha'-\beta') + i''(C''-\alpha''-\beta'') + \ldots = 2\gamma p$$

si $C^{(\rho)}$ indique combien de fois une coïncidence se produit entre un point $x^{(\rho)}$ ou $y^{(\rho)}$ de $i^{(\rho)}$ valeurs et le point de γ valeurs $y=x$, si par conséquent l'on pose

$$C=i'C' + i''C'' + i'''C''' + \ldots.$$

L'exemple le plus simple d'application de cette formule est fourni par la détermination du nombre des tangentes doubles de la courbe f, ou, en général, par la détermination du nombre des courbes d'un réseau à M points mobiles sur f tangentes en deux points différents de C_n. Par tout point x passe un faisceau de courbes à $M-1$ points mobiles d'intersection dans lequel, d'après les notations précédentes, se trouvent α_1-2 courbes tangentes (car le nombre précédent α_1 est diminué de 2 si l'on y écrit $M-1$ à la place de M). Chacune de celles-ci coupe C_n en un point de deux valeurs

et en M — 3 points d'une seule valeur. Nous avons donc

$$i' = 1, \quad \beta' = \alpha' = (\alpha_1 - 2)(M - 3), \quad \gamma = \alpha_1 - 2,$$
$$i'' = 2, \quad \beta'' = \alpha_1 - 2, \quad \alpha'' = M - 2 \quad (^1).$$

D'ailleurs $C'' = \alpha_2$ est le nombre (déjà connu pour nous) des courbes osculatrices, tandis que $C' = 2\alpha_{11}$ indique le *double* du nombre cherché. Si donc nous supposons la courbe f dépourvue de points de rebroussement, nous trouvons *pour le nombre des courbes doublement tangentes du réseau*

$$\alpha_{11} = (\alpha_1 - 2)(M - 3) - \alpha_2 + (\alpha_1 - 2) + (M - 2) + (\alpha_1 - 2)p.$$

Mais nous pouvons aussi trouver de la même manière le nombre α_{1q} des courbes d'un système linéaire q fois infini à M points d'intersection mobiles tangentes en un point à un degré q de multiplicité et simplement tangentes en un autre point. On obtient

$$\alpha_{1q} = 2(\alpha_q - q - 1)(M - q - 2)$$
$$- (q+1)[\alpha_{q+1} - (\alpha_q - q - 1) - (M - q - 1)] + 2(\alpha_q - q - 1)p;$$

pour faire concorder nos notations avec celles de Brill nous devons poser $\alpha_q = [q]_M$ et $\alpha_{1q} = [1, q]_M$. Notre dernière équation devient par là

$$[1, q]_M = 2[q]_{M-1}(M - 2 - q) - (q+1)\{[q+1]_M - [q]_{M-1}$$
$$- (M - 1 - q)\} + 2p[q]_{M-1}.$$

On peut d'une manière tout à fait analogue établir une formule apprenant à former le nombre $[s, q]_M$ au moyen du nombre

$$[s - 1, q]_{M-1},$$

et une généralisation ultérieure donne finalement une formule de récursion pour le nombre $[q, q', \ldots, q^{(\rho)}]_M$, c'est-à-dire pour le nombre des courbes d'un système linéaire de multiplicité

$$q + q' + \ldots + q^{(\rho)} \quad (^2).$$

---

(1) Le nombre α'' se détermine ainsi qu'il suit. En tout point y'' est tangente une courbe du réseau. Or celle-ci compte double dans l'ensemble des α_1 courbes du réseau passant par y'' qui touchent f; par conséquent, de fait, chacun des autres M — 2 points d'intersection avec f doit être compté comme point x'' de deux valeurs correspondant à y'', ainsi que l'exige le théorème ci-dessus.

(2) Les formules de récursion très compliquées données par DE JONQUIÈRES et BRILL

Pour finir, nous reviendrons encore une fois sur les formules relatives aux nombres α_q, parce que leur étude attentive conduit à des relations géométriques dignes de remarque entre certains systèmes de courbes. Nous apprendrons là à connaître une loi de réciprocité (1) qui doit dans un certain sens être considérée comme une généralisation du principe de dualité.

Soient données d'abord deux correspondances $\varphi(x, y) = 0$ et $\psi(x, y) = 0$; soit $\Phi = 0$, la courbe de coïncidence (p. 162) de φ, $\Psi = 0$ celle de ψ; supposons ensuite que φ et ψ soient également de l'ordre r par rapport aux x, de l'ordre s par rapport aux y et n'aient aucun point de coïncidence commun. Nous considérerons le système linéaire de correspondances $\varphi + \lambda\psi = 0$. Tout point de f sera alors un point de coïncidence d'une correspondance du système, et d'une seulement. Si, en effet, deux correspondances du système devaient avoir un point commun de coïncidence, ce dernier serait évidemment un point de coïncidence pour toutes les correspondances du système, et, par conséquent, aussi pour φ et ψ, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. Il suit de là que par chaque point de f il ne passe qu'une *seule* des courbes de coïncidence appartenant au système $\varphi + \lambda\psi = 0$, c'est-à-dire que ces courbes forment le faisceau $\Phi + \lambda\Psi$, ou, en d'autres termes : *L'équation de la courbe de coïncidence d'une correspondance* $\varphi(x, y) = 0$ *est linéaire par rapport aux coefficients de* φ; *à un système* linéaire *de correspondances répond donc aussi un système* linéaire *de courbes de coïncidence.* C'est ce que confirment les deux exemples que nous avons calculés ci-dessus (cas de $\gamma = 1$ et de $\gamma = 2$).

Maintenant, dans le système $\varphi + \lambda\psi = 0$, seront comprises un certain nombre de correspondances pour lesquelles deux points de coïncidence se trouveront infiniment voisins, et ce sont précisément celles dont les courbes correspondantes de coïncidence faisant

---

peuvent être remplacées par des formules directes relativement simples au cas où le système linéaire de courbes dépend uniquement de points fixes de la courbe primitive, et où toutes les courbes qui en font partie sont adjointes de cette dernière. Ces formules directes ont été déduites par M. LINDEMANN de la théorie des fonctions Θ; voir *Berichte der naturforschenden Gesellschaft zu Freiburg in Br.*, t. VII, p. 273.

(1) *Voir* BRILL, *Math. Annalen*, t. IV, p. 527. La loi de réciprocité qui va être développée peut aussi se déduire de la théorie des fonctions Θ. *Voir* LINDEMANN (*loc. cit.*).

partie du faisceau $\Phi + \lambda\Psi = 0$ touchent la courbe $f = 0$. Mais nous connaissons, d'après ce qui précède (p. 161), l'ordre des courbes Φ et Ψ, et aussi, d'après la formule relative à α_1, le nombre de ces courbes tangentes du faisceau, et, par conséquent, le nombre des correspondances ayant le caractère précité.

Dans l'application ultérieure de ces développements, la remarque suivante sera encore utile. Pour le nombre α_q des courbes d'un système linéaire ([1]) q fois infini à M points d'intersection mobiles, qui ont un contact d'ordre q, nous avons trouvé plus haut la valeur (p. 172)

$$\alpha_q = (q+1)(M + qp - q).$$

En posant ici $M - 1$ à la place de M, c'est-à-dire en considérant un système de courbes de la même multiplicité à $M - 1$ points d'intersection mobiles seulement, on reconnaît qu'il n'y a dans ce système que $\alpha_q - (q+1)$ courbes ayant un contact d'ordre q. *La courbe du système qui a un contact d'ordre q au point fixe lui-même compte donc $q + 1$ fois parmi l'ensemble des courbes dont le contact est du même ordre.*

Étant données actuellement $q + 1$ courbes $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q$, nous considérerons le système q fois infini

$$\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_q\varphi_q = 0,$$

dont les courbes individuelles coupent la courbe f en M points mobiles (et en outre en a points fixes simples ou doubles de f). Par les points de contact des courbes du système $q - 1$ fois infini,

$$\varphi_1 + \mu_1\varphi_2 + \ldots + \mu_{q-1}\varphi_q = 0,$$

qui ont un contact d'ordre $q - 1$, faisons passer une courbe Φ_0 (qui sera, par suite, la courbe de coïncidence d'une correspondance entre un point de f et les points dans lesquels une courbe du système passant par ce point a un contact d'ordre $q - 1$). Par les points correspondants du système

$$\varphi_0 + \nu_1\varphi_2 + \nu_2\varphi_3 + \ldots + \nu_{q-1}\varphi_q = 0$$

faisons passer une autre courbe Φ_1, etc., de manière à obtenir en

---

([1]) Par système, on doit toujours entendre ici un système linéaire.

tout $q+1$ courbes $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_q$. Une combinaison linéaire des $q+1$ systèmes $q-1$ fois infinis ainsi déterminés des φ donne alors sur f une correspondance qui se compose *linéairement* [1] des $q+1$ correspondances citées (c'est-à-dire déterminant les Φ), et, par conséquent, leur courbe de coïncidence se compose de même linéairement avec les Φ suivant le théorème précédent. A l'ensemble des systèmes $q-1$ fois infinis que renferme le système donné q fois infini des φ, correspond ainsi un système *linéaire* q fois infini de courbes Φ. Dans ce dernier, choisissons de nouveau un système $q-1$ fois infini

$$\text{(I)} \qquad \Phi_1 + \rho_1 \Phi_2 + \ldots + \rho_{q-1} \Phi_q = 0.$$

A chaque courbe de celui-ci correspond un système $q-1$ fois infini déterminé de courbes φ, et précisément un système comprenant la courbe φ_0; car les systèmes répondant respectivement aux courbes $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_q$ renferment individuellement la courbe φ_0. Maintenant, dans le système (I), il y aura un certain nombre de courbes ayant un contact d'ordre $q-1$ (q points de section). A une telle courbe Φ doit alors correspondre un système $q-1$ fois infini de courbes φ pour lequel q des courbes ayant un contact d'ordre $q-1$ qui y sont comprises coïncident; car à tout point d'intersection d'une courbe Φ avec f correspond une courbe φ du système correspondant des φ, ayant en ce point un contact d'ordre $q-1$. Parmi les systèmes $q-1$ fois infinis de courbes φ qui sont possibles dans le système q fois infini donné et qui comprennent la courbe φ_0, figurent dans tous les cas ceux dont les courbes passent toutes ensemble par un point d'intersection de φ_0 avec f (car cela donne *une* condition linéaire pour les q paramètres). Dans un tel système, la courbe tangente d'ordre $q-1$, au point fixe lui-même, compte q fois d'après une observation récemment faite. Parmi les points de contact des courbes Φ de notre système $q-1$ fois infini qui sont tangentes d'ordre $q-1$ se trouvent par conséquent dans tous les cas les points d'intersection de f avec φ_0; et en outre encore d'autres points (dépendant uniquement de l'ensemble des courbes φ) dont nous devrons nous occuper plus tard.

---

[1] A un point x de f doit en effet correspondre alors une courbe φ du système $q-1$ fois infini ayant en ce point un contact d'ordre $q-2$, c'est-à-dire une courbe composée linéairement avec les courbes φ. (*Voir* ci-après, p. 184.)

La réciprocité entre les courbes Φ et φ peut, d'après cela, s'énoncer de la manière suivante [1] : Si l'on groupe les $q+1$ courbes φ en $q+1$ systèmes de chacun q, et que l'on cherche les courbes d'un tel système qui ont avec f un contact d'ordre $q-1$, on peut faire passer par les points de contact une courbe Φ qui, en dehors de ces points, ne rencontre plus f qu'aux points fixes des φ et aux points singuliers. Chaque système fournit ainsi une courbe Φ, et ces courbes forment ensemble un système de $q+1$ courbes. On peut de nouveau appliquer à ces dernières la même opération que l'on a appliquée aux courbes φ, et les courbes mobiles qui prennent ainsi naissance ne sont autres que les courbes φ dont on est parti.

Avant d'aller plus loin, éclaircissons ceci par un exemple. Supposons que l'on ait $q=2$, et, par conséquent, le réseau

$$\varphi_0+\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2=0.$$

Nous formons les trois faisceaux

$$\varphi_0+\lambda\varphi_1=0,\quad \varphi_1+\mu\varphi_2=0,\quad \varphi_2+\nu\varphi_0=0.$$

Dans chacun d'eux il y a un certain nombre de courbes tangentes dont les points de contact sont traversés respectivement par les courbes $\Phi_2=0, \Phi_0=0, \Phi_1=0$. Actuellement considérons, par exemple, la série simplement infinie des faisceaux

$$(\varphi_0+\lambda\varphi_1)+\rho(\varphi_1+\mu\varphi_2)=0,$$

laquelle embrasse toutes les courbes du réseau, mais les range seulement d'une manière spéciale en ce que la courbe φ_1 est commune à tous les faisceaux. A un point x de f correspond dans le premier faisceau la courbe $\varphi_0(x)\varphi_1(y)-\varphi_1(x)\varphi_0(y)=0$, dans le second la courbe $\varphi_1(x)\varphi_2(y)-\varphi_2(x)\varphi_1(y)=0$, par conséquent dans le réseau (d'après notre arrangement) le faisceau de courbes

$$[\varphi_0(x)\varphi_1(y)-\varphi_1(x)\varphi_0(y)]+\rho[\varphi_1(x)\varphi_2(y)-\varphi_2(x)\varphi_1(y)]=0,$$

---

[1] Dans la marche suivie par Brill (*loc. cit.*), ces théorèmes apparaissent comme des applications d'un théorème sur les déterminants, d'ailleurs important, mais sur lequel nous n'insisterons pas ici.

d'où, en fait, une correspondance qui se compose linéairement avec les correspondances données par les deux premiers faisceaux. Sa courbe de coïncidence est, d'après cela, donnée par $\Phi_2 + \rho\,\Phi_0 = 0$ (p. 175). Maintenant à une courbe tangente du dernier faisceau correspond un faisceau des φ dans lequel deux courbes tangentes se confondent, et qui, par conséquent, ou bien a, comme il a été décrit, en un point d'intersection de f avec φ_1 un point fixe, ou bien renferme une courbe osculatrice du réseau des φ. Si donc nous désignons la courbe de coïncidence de la correspondance

$$\Phi_2(x)\,\Phi_0(y) - \Phi_0(x)\,\Phi_2(y) = 0$$

par $X_1 = 0$, on a $X_1 = \varphi_1 . L$, $L = 0$ déterminant sur f les points où les courbes du réseau ont une osculation. Or, ces points sont indépendants de l'arrangement fait par nous des courbes en faisceaux; on a, par conséquent, aussi $X_2 = \varphi_2 . L$, $X_3 = \varphi_3 . L$, si $X_2 = 0$, $X_3 = 0$ déterminent les courbes tangentes des faisceaux $\Phi_0 + \rho\Phi_1 = 0$, $\Phi_1 + \rho\Phi_2 = 0$ (il sera démontré ultérieurement qu'aucun facteur constant ne peut se trouver à côté de φ_1, φ_2, φ_3 dans le second membre). Il suit de là que, dans *tout* faisceau compris dans le réseau des Φ, il se rencontrera des courbes qui touchent $f = 0$ en ses points d'intersection avec $L = 0$. Donc, tandis qu'en un point quelconque de f une seule courbe du réseau des Φ est tangente, il y a un nombre infini de courbes de ce réseau tangentes en chacun des points dont il a été parlé. Or, un point dans lequel cette circonstance se présente est, comme on sait, situé sur la jacobienne du réseau (p. 102), et nous avons par suite ce théorème :

Les points où une courbe du réseau des φ a une osculation avec la courbe f sont situés sur la jacobienne du réseau des Φ [1].

---

[1] On peut aussi le démontrer directement par voie algébrique; on trouve alors que L est la courbe de coïncidence déjà mentionnée plus haut de la correspondance qui détermine les courbes osculatrices, γ étant égal à 2 (p. 172, note). Désignant par $(\varphi\chi\psi)$ le déterminant fonctionnel des trois fonctions φ, χ, ψ divisé par le produit de leurs ordres, on a, d'après la note de la page 171,

(1) $$\Phi_0 = (f\varphi_1\varphi_2),\quad \Phi_1 = (f\varphi_2\varphi_0),\quad \Phi_2 = (f\varphi_0\varphi_1);$$

(2) $$X_0 = (f\Phi_1\Phi_2),\quad X_1 = (f\Phi_2\Phi_0),\quad X_2 = (f\Phi_0\Phi_1);$$

Ces relations se dessinent d'une manière tout à fait analogue dans le cas général. Nous avons d'abord encore ici à montrer que, dans un système $q-1$ fois infini de courbes Φ, M seulement des courbes ayant un contact d'ordre $q-1$ dépendent de la manière dont les q systèmes $q-1$ fois infinis de courbes φ ont été choisis parmi la totalité de ces courbes, tandis que les autres, au contraire, ne dépendent que de l'ensemble des courbes φ, et nous nous proposons de montrer que ces autres courbes sont les α_q points dans lesquels une courbe φ peut avoir un contact d'ordre q. Dans ce but nous établirons les considérations suivantes :

Un système $q-1$ fois infini, compris dans le système q fois infini des φ, est, en toute hypothèse, déterminé par q courbes choisies arbitrairement dans le premier. Considérons maintenant

---

d'où, en vertu des explications du texte,

$$(3) \qquad (f\Phi_1\Phi_2)=\varphi_0 L, \quad (f\Phi_2\Phi_0)=\varphi_1 L, \quad (f\Phi_0\Phi_1)=\varphi_2 L.$$

On a d'ailleurs constamment, ainsi qu'il a été observé p. 165, les identités

$$(f\Phi_0\Phi_1)\Phi_2+(f\Phi_1\Phi_2)\Phi_0+(f\Phi_2\Phi_0)\Phi_1=(\Phi_0\Phi_1\Phi_2)f,$$
$$(f\varphi_0\varphi_1)\varphi_2+(f\varphi_1\varphi_2)\varphi_0+(f\varphi_2\varphi_0)\varphi_1=(\varphi_0\varphi_1\varphi_2)f;$$

et, en faisant usage, on trouve, en vertu de (1) et (3), pour la détermination de L, la relation

$$(4) \qquad (\varphi_0\varphi_1\varphi_2)L=(\Phi_0\Phi_1\Phi_2),$$

ce qui démontre le théorème du texte. On peut d'ailleurs montrer que L est toujours une fonction entière. Nous supposerons que les courbes φ soient de l'ordre m et, pour plus de simplicité, ne passent pas toutes par les points doubles de f. Alors les Φ sont, d'après (1), de l'ordre $2m+n-3$; L est, d'après (3), de l'ordre $3(m+n-3)$, et par conséquent du même ordre que la courbe de coïncidence de la correspondance considérée p. 166. *Voir* aussi p. 161,

$$(5) \qquad (f\varphi_0\varphi_1)\varphi_2(y)+(f\varphi_1\varphi_2)\varphi_0(y)+(f\varphi_2\varphi_0)\varphi_1(y)=0.$$

Parmi les points d'intersection de cette dernière courbe avec f, $\gamma(\gamma+1)=6$ se trouvent réunis en chaque point double de f (d'après le théorème sur les coïncidences improprement dites, p. 164); mais au même point sont situés des points d'intersection en nombre égal de chacune des courbes $(f\Phi_i\Phi_k)=0$ avec f, comme il résulte d'un théorème énoncé p. 164 (car les courbes Φ comme courbes de coïncidence passent toutes par les points doubles et cuspidaux de f). La courbe $(f\Phi_i\Phi_k)$ coupe donc f aux mêmes points absolument que le produit $\varphi_i L$, et peut, par suite, être représentée sous la forme $\varphi_i L+Kf$. Puisque L se comporte aux points singuliers de f comme la courbe de coïncidence de la correspondance (5), il en résulte que L est *la fonction calculée par* Brill (*Math. Annalen*, t. III, p. 462) (à part un facteur numérique). — Les théorèmes exprimés dans les équations (3), (4) relativement aux déterminants fonctionnels se rattachent à ceux donnés par Clebsch (*Journal de Crelle*, t. 69 et 70).

un système $q-1$ fois infini de cette nature renfermant une courbe φ quelconque (comme φ_0), et, en outre, $q-1$ courbes φ voisines les unes des autres et tangentes d'ordre $q-1$, c'est-à-dire sécantes d'ordre q en $q-1$ points ξ de f voisins les uns des autres ([1]). La courbe Φ, qui répond au système ainsi construit, aura toujours en ξ un contact d'ordre $q-2$ avec f, mais elle coupera simplement la courbe aux autres points où d'autres courbes φ de notre système ont avec f un contact d'ordre $q-1$. Si nous faisons actuellement avancer ξ sur f, notre système $q-1$ fois infini variera avec ξ, tout en renfermant encore φ_0, et en particulier ξ peut avoir une position telle que la courbe correspondante Φ soit tangente de l'ordre $q-1$, c'est-à-dire sécante d'ordre q. Dans ce cas, nous avons dans le système en question des courbes φ, non pas $q-1$, mais q courbes voisines, qui ont chacune avec f, aux points ξ, un contact d'ordre $q-1$. Cette circonstance se présente, d'après ce qui précède, *premièrement* aux points d'intersection de f avec φ_0 (p. 176), *deuxièmement* aux α_q points où une courbe φ peut avoir un contact d'ordre q, cette courbe comptant alors double. Mais le fait ne peut avoir lieu en d'autres points de f.

En effet, une courbe φ, ayant quelque autre part un contact d'ordre $q-1$, ne compte toujours qu'une fois; un des systèmes $q-1$ fois infinis compris dans le système q fois infini des courbes φ est donc complétement déterminé par q courbes voisines, et conséquemment ne comprendra plus la courbe φ_0 dont le choix est entièrement arbitraire. Donc, dans les points de contact des courbes Φ du système $q-1$ fois infini répondant à φ_0 qui sont tangentes d'ordre $q-1$, sont uniquement compris, en dehors des points d'intersection de φ_0 avec f, *les points α_q qui dépendent de l'ensemble des φ.*

Mais ces points doivent être comptés $q-1$ fois. En effet, puisque les Φ, conformément à leur définition, rencontrent f en α_{q-1} points mobiles, α_{q-1} étant égal, d'après ce qui a été dit p. 172, à $q[M+(q-1)(p-1)]$, et f étant d'abord supposé n'avoir pas de points de rebroussement, on a pour le nombre $\mathcal{A}_{q-1}$ des courbes qui appartiennent au système (I) et ont un contact

([1]) On peut déterminer des courbes semblables en tout point de f, parce qu'une courbe φ est précisément déterminée par q points (qui sont ici voisins).

d'ordre $q-1$ la relation

$$\mathfrak{A}_{q-1}=q[\alpha_{q-1}+(q-1)(p-1)]=q^2\mathrm{M}+q(q^2-1)(p-1).$$

Ces points doivent être situés en partie aux M intersections de φ_0 avec f qui ne sont pas communes à toutes les courbes φ (car par les points communs passent aussi les courbes Φ), en partie aux points α_q; c'est-à-dire que pour toutes les valeurs de M existe nécessairement la relation

$$q^2\mathrm{M}+q(q^2-1)(p-1)=\varkappa\mathrm{M}+\lambda(q+1)(\mathrm{M}+qp-q).$$

Mais de là résulte $\varkappa=1$ et $\lambda=q-1$. C. Q. F. D.

Les $\mathfrak{A}_{q-1}$ points sont traversés par une courbe que nous désignerons par X_0, et qui passe en outre par les points singuliers ainsi que par les points simples de f communs aux courbes φ. *Nous nous proposons de déterminer la manière dont se comporte* X_0 *en ces derniers points.* Nous le pouvons, d'après un théorème précédent (p. 164), parce que X_0 est courbe de coïncidence d'une correspondance à point de $q-1$ valeurs en $x=y$, correspondance en vertu de laquelle à tout point x répond une courbe Φ du système (I). Mais nous connaissons la manière d'être des courbes Φ aux points en question, puisqu'elles sont courbes de coïncidence de correspondances en vertu desquelles à tout point x répond une courbe φ ayant en ce point un contact d'ordre $q-2$. Et en tout point double de f, où se trouvent σ points d'intersection fixes, d'après le théorème précité et en observant que l'on a $\gamma=q-1$, sont situés $q(\sigma+q-1)$ points d'intersection des Φ, et par conséquent

$$\text{(II)}\qquad q[q(\sigma+q-1)+q-1]=q^2\sigma+q(q^2-1)$$

points d'intersection de X_0. Au contraire, en tout point simple de f dans lequel les Φ ont σ points communs avec f, sont situés $q\sigma$ points d'intersection des Φ, et conséquemment $q^2\sigma$ points d'intersection de X_0. Or, il est facile de voir que dans tous les points d'intersection de X_0 avec f le produit $\varphi_0\mathrm{L}_q^{q-1}$ se comporte de même, si $\mathrm{L}_q=0$ est la courbe de coïncidence qui découpe les points α_q. En effet, pour ces derniers il y a, d'après le même théorème, $(q+1)\sigma$ points d'intersection de L_q qui tombent en tout point simple de f appartenant à l'espèce précitée, et par consé-

quent

$$\sigma + (q-1)(q+1)\sigma = q^2\sigma$$

points d'intersection du produit $\varphi_0 L_q^{q-1}$. D'ailleurs, en tout point double de f où se trouvent σ points d'intersection fixes des φ, sont situés $(q+1)(\sigma+q)$ points de L_q et par conséquent, comme dans (II),

$$\sigma + (q-1)(q+1)(\sigma+q) = q^2\sigma + q(q^2-1)$$

points de $\varphi_0 L_q^{q-1}$; enfin, ce dernier produit passe une fois par les M points d'intersection de φ_0 avec f et $q-1$ fois par les points α_q, comme cela doit être. Si donc C désigne un facteur constant, nous pouvons (sous adjonction de f) poser [1]

$$\text{(III)} \qquad X_0 = C.\varphi_0.L_q^{q-1}.$$

Mais le facteur C ne peut être qu'un facteur numérique, ou, en d'autres termes, ne peut plus renfermer les coefficients des courbes φ et f. Autrement, en effet, son évanouissement exprimerait que dans le système (I) il existe une infinité de courbes Φ ayant un contact d'ordre $q-1$ (X_0 étant identiquement nul); mais il faudrait alors, ou bien que φ_0 eût une infinité de points communs avec f, ou bien qu'il existât dans le système une infinité de courbes φ ayant un contact d'ordre q (d'où $L_q \equiv 0$). Mais évidemment les deux conditions ne peuvent pas être indiquées par l'évanouissement d'une expression unique C. Donc, puisque C est un facteur numérique, il doit, par raison de symétrie, avoir la même valeur dans toutes les équations qui se déduisent de (III) par permutation de φ_0 avec $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q$, et nous pouvons le faire entrer dans la définition des expressions X_i; $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_q$ ayant un sens analogue à X_0. *On a donc les équations*

$$\text{(IV)} \qquad X_i = \varphi_i.L_q^{q-1}.$$

---

(1) On reconnaît facilement aussi qu'il y a concordance entre les ordres dans les deux membres, car (p. 161) L_q est de l'ordre $(q+1)\left[m+\frac{1}{2}(n-3)q\right]$ (m désignant l'ordre de φ_0, n celui de f), et X_0 est de l'ordre

$$q\left\{q\left[m+\frac{1}{2}(n-3)(q-1)\right]+\frac{1}{2}(n-3)(q-1)\right\} = q^2 m + \frac{1}{2}(n-3\ q(q^2-1).$$

La loi de réciprocité énoncée plus haut est ainsi complétement démontrée (p. 178).

Cette même loi trouve son expression dans la correspondance des nombres M et α_{q-1}, c'est-à-dire, des nombres relatifs aux points d'intersection mobiles des courbes φ et Φ. De toute relation entre les nombres M, α_{q-1} et autres dépendant des φ, on peut en déduire une seconde, en permutant M avec α_{q-1} et les autres nombres avec ceux qui leur correspondent dans le système des Φ. En particulier se présente ici la question de savoir quel nombre β_q doit être considéré dans ce dernier comme répondant au nombre α_q. Les points α_q sont conjointement avec les points de rebroussement de f (lesquels doivent éventuellement être comptés plusieurs fois), les points de coïncidence proprement dits d'une correspondance dont la courbe de coïncidence est donnée par $L_q = 0$. Pour trouver le nombre β_q, il nous faut donc former la courbe L_q pour le système des Φ au lieu de celui des φ. *Nous allons montrer qu'il y a identité entre cette courbe et la première courbe* L_q.

La correspondance pour laquelle L_q est courbe de coïncidence associe à tout point x une courbe du système des courbes φ ayant sur ce point un contact d'ordre $q-1$ et à tout point y une courbe qui traverse sur f les points de contact de la courbe φ tangente d'ordre $q-1$ qui passe par y, c'est-à-dire une courbe du système Φ. Cette correspondance sera donc représentée par une équation linéaire par rapport aux quantités $\varphi(y)$, et linéaire par rapport aux quantités $\Phi(x)$. Actuellement, si l'on considère un point x pour lequel Φ_0 s'évanouit, la courbe φ, qui y est tangente d'ordre $q-1$, par suite de la définition de Φ_0, est nécessairement une combinaison linéaire des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q$: en d'autres termes, dans notre expression linéo-linéaire, Φ_0 sera toujours multipliée par φ_0, tandis que les autres expressions Φ ne peuvent avoir ce facteur. Si l'on considère ensuite un point y de f situé sur φ_0, on reconnaît de même que Φ_0 ne peut pas non plus se présenter multiplié par les facteurs $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q$. De plus, aucun facteur constant (aucun invariant simultané des φ et de f) ne peut s'adjoindre au produit $\Phi_0\varphi_0$. L'évanouissement d'un tel facteur aurait en effet pour conséquence que dans l'équation de la correspondance ne figurerait plus de terme en $\varphi_0(y)$. Donc, en vertu de la correspondance, serait associée à tout point x de f une courbe du système $q-1$

fois infini déterminé par $\varphi_1, \varphi_2 \ldots, \varphi_q$, ayant en ce point un contact d'ordre $q-1$; or, la condition nécessaire et suffisante pour que dans ce système il y ait une infinité de courbes φ tangentes d'ordre $q-1$ est évidemment l'évanouissement identique de Φ_0; cette même condition ne peut donc pas être exprimée par l'évanouissement d'un invariant. Le produit $\Phi_0\varphi_0$ ne peut ainsi être multiplié dans l'équation de correspondance que par un facteur numérique, et à cause de la symétrie il doit en être de même des termes $\Phi_1\varphi_1, \ldots, \Phi_q\varphi_q$. *La correspondance demandée peut donc être représentée sous la forme* (¹)

$$\Phi_0(x)\varphi_0(y) + \Phi_1(x)\varphi_1(y) + \ldots \Phi_q(x)\varphi_q(y) = 0.$$

Si l'on établit la correspondance analogue pour les expressions Φ, on obtient absolument la même équation; seulement les x et les y sont intervertis. On a, en effet, à écrire Φ_i à la place de φ_i, X_i à la place de Φ_i; alors un facteur L_q^{q-1} se sépare en vertu de (IV) et l'on obtient le résultat susénoncé. Les correspondances étant les mêmes, leurs courbes de coïncidence sont aussi identiques, ce qu'il fallait démontrer.

Les résultats algébriques conclus des précédentes considérations continuent évidemment à rester vrais, si la courbe f possède des rebroussements; seulement, quelques-uns des α_q points de coïncidence proprement dits se confondent avec ces points (suivant une loi à déterminer). L'étude de ces faits va nous conduire à la détermination demandée du nombre β_q.

Les points d'intersection de L_q avec f qui donnent des coïncidences proprement dites se décomposent en deux groupes : les α_q points non situés aux points de rebroussement, et les r rebroussements de f, par lesquels nous supposerons d'abord que les courbes φ ne passent pas. Dans tout point du premier groupe *une* courbe φ a un contact d'ordre q, et toute courbe φ qui y renferme q points voisins de f passe aussi par un $(q+1)^{\text{ième}}$ point voisin sur la même courbe. En un point du même groupe, *une* courbe Φ (comptant éventuellement plusieurs fois) a de même un contact d'ordre q, et, en outre, *un nombre simplement infini* de courbes Φ y ont cha-

(¹) *Voir* l'exemple de $q = 2$, p. 165.

cune un contact d'ordre $q-1$ (¹). Dans un rebroussement, au contraire, les φ se comportent exactement comme les Φ en un des points α_q; en effet, chacune des courbes q en nombre simplement infini qui passent par le point de rebroussement et par $q-2$ points voisins a un contact d'ordre $q-1$, parce que le point de rebroussement compte double, et parmi elles il y aura une courbe (comptant éventuellement plusieurs fois), qui renferme encore un $(q-1)^{\text{ième}}$ point voisin sur f (c'est-à-dire de nouveau en tout $q+1$ points voisins). Il suit de là, d'après notre loi de réciprocité, qu'inversement les Φ se comportent aux points de rebroussement de f comme les φ aux points α_q; c'est-à-dire que nous devons prendre $\beta_q = r$. *Ainsi les nombres* α_q et r *se correspondent en vertu de la réciprocité entre les* φ *et les* Φ.

La manière d'être spéciale des Φ aux points de rebroussement ne peut être fondée que sur ce que ces courbes passent toutes, comme courbes de coïncidence, au travers des points de rebroussement, car autrement les mêmes conclusions auraient lieu pour elles que pour les courbes φ. On peut, en revenant en arrière, déduire de là que notre conclusion est également inexacte pour les courbes φ, si celles-ci ont des points fixes communs aux points de rebroussement; c'est-à-dire que ces derniers se comportent alors comme les points α_q. *Si donc les courbes* φ *passent toutes ensemble par* r' *points de rebroussement de* f*, les nombres* α_q *et* $r-r'$ *ou* r *et* α_q+r' *se correspondent, de telle sorte que chacun des* r' *rebroussements de cette espèce se correspond à lui-même.*

Ces dernières réflexions nous permettent enfin de déterminer aussi les réductions qu'éprouve le nombre α_q en cas de points de rebroussement. Considérons un système q fois infini de courbes φ, pour lesquelles M, r, r' sont supposés avoir les significations cidessus. Le nombre des courbes φ qui passent par un point quelconque du plan et ont un contact d'ordre $q-1$ avec la courbe primitive est alors

$$\alpha_{q-1} = q[\mathrm{M} + (q-1)(p-1)] - \rho r - \rho' r',$$

ρ, ρ' étant encore à déterminer. Mais de là résulte, en permutant d'après notre loi de réciprocité $\alpha_q - 1$ avec M, r avec $\alpha_q + r'$, cette

(¹) On le reconnaît de la même manière que pour le cas de $q=2$.

autre équation

$$M = q[\alpha_{q-1} + (q-1)(p-1)] - \rho(\alpha_q + r') - \rho' r',$$

et, par élimination de α_{q-1} entre les deux,

$$\rho\alpha_q = (q^2-1)(M + qp - q) - \rho q r - r'[\rho + (q+1)\rho'].$$

Mais pour $r = r' = 0$ on a, comme on sait, $\alpha_q = (q+1)(M + qp - q)$ et par suite $\rho = q - 1$. Si l'on porte ces valeurs dans la dernière équation, tous les termes de celle-ci auront le facteur $q - 1$, à l'exception du terme multiplié par ρ'.

Si donc ρ''_{q-1} désigne un nombre entier à déterminer, on a

$$\rho' = (q-1)\rho''_{q-1}.$$

Il vient par suite

$$\alpha_q = (q+1)(M + qp - q) - qr - [(q+1)\rho''_{q-1} + 1]r'$$

et

$$\alpha_{q-1} = q[M + (q-1)(p-1)] - (q-1)(r + \rho''_{q-1} r').$$

Il résulte de là, par substitution de $q + 1$ à q,

$$\alpha_q = (q+1)(M + qp - q) - q(r + \rho'' r').$$

L'identification des deux valeurs ainsi trouvées de α_q conduit à la formule de récursion

$$q\rho''_q = (q+1)\rho''_{q-1} + 1.$$

Or, nous connaissons la valeur de ρ''_q pour $q = 1$, $r = r' = 1$, $M = n - 2$ (p. 167, où nous avons obtenu pour le nombre des tangentes menées d'un point de rebroussement à la courbe C_n la valeur $\alpha_1 = k - 3$). Il résulte de là que l'on a $\rho''_1 = -1$, et il vient en conséquence

$$2\rho''_2 = 3\rho''_1 + 1 = -2, \quad \text{d'où} \quad \rho'_2 = -1, \text{ etc.}$$

On trouve ainsi d'une manière générale que ρ''_q est indépendant de q et égal à -1, ce qui donne le théorème suivant :

Dans un système linéaire q fois infini de courbes ayant sur f des points fixes communs quelconques, parmi lesquels r' points de rebroussement de f, et rencontrant en outre f en M *points*

mobiles, il existe

$$\alpha_q = (q+1)(M + qp - q) - q(r - r')$$

courbes ayant avec f un contact d'ordre q (ailleurs qu'aux points fixes). Dans cette formule, p est le genre, r' le nombre des points de rebroussement de f.

Observons, en terminant, que des lois analogues de réciprocité peuvent s'établir pour les variétés linéaires moins élevées, de courbes φ extraites du système d'ordre q (¹). Ces lois permettent de déterminer exactement les courbes ayant un contact multiple aux divers points de f (*voir* Brill, *loc. cit.*)

IX. — Représentation à détermination unique de deux plans l'un sur l'autre.

Le point de départ de nos recherches sur les courbes algébriques a été la théorie de la transformation linéaire. Nous avons appris à considérer cette dernière comme l'expression analytique de la relation projective de deux plans, l'un par rapport à l'autre, et nous avons pu, en conséquence, définir les propriétés auxquelles nous avions uniquement égard dans les courbes comme étant celles qui ne sont modifiées par aucune projection (réelle ou imaginaire) des courbes en question. A la suite de ces considérations est venue d'abord la théorie des formes algébriques ternaires, et avec elle au premier plan la notation et le calcul symboliques, qui nous ont fourni un algorithme élégant pour les considérations géométriques. En avançant davantage, nous avons d'ailleurs franchi successivement les limites du terrain caractérisé par ces points de vue. En effet, les relations respectives entre la hessienne et la steinérienne nous ont déjà offert un exemple de deux courbes ayant entre elles une relation non linéaire, mais pourtant univoque, et dans l'étude de la géométrie sur une courbe algébrique nous avons encore plus souvent remarqué occasionnellement que les propositions exposées

(¹) Nous devons faire remarquer que ces lois de réciprocité sont en corrélation étroite avec la loi ordinaire de dualité, telle que celle-ci se présente dans les espaces de plusieurs dimensions. (*Voir* aussi la note de la p. 107.)

avaient un caractère invariant, non-seulement vis-à-vis d'une transformation linéaire, mais encore en général vis-à-vis d'une transformation univoque de la courbe originaire, c'est-à-dire qu'elles avaient lieu pour la courbe transformée aussi bien que pour la courbe primitive. Mais, tandis que nous ne parlions plus haut que de deux courbes liées élément par élément l'une à l'autre, on peut aussi poser la question de savoir s'il est possible d'établir entre deux plans, point par point, une relation à détermination unique, et quelles sont les propriétés qui appartiennent à ces sortes de transformations. Les transformations relatives à *tout* le plan doivent seules nous occuper d'abord; nous traiterons dans une autre occasion de celles qui sont univoques pour deux courbes individuelles seulement.

Un exemple très simple, celui de la *transformation quadratique* (¹), nous montre immédiatement la possibilité d'une relation non linéaire existant avec réciprocité, élément par élément entre deux plans. Cette transformation est établie entre les points x et y des deux plans supposés réunis ou séparés E_x et E_y au moyen des équations

$$(1) \qquad \rho x_1 = y_2 y_3, \quad \rho x_2 = y_3 y_1, \quad \rho x_3 = y_1 y_2,$$

qui donnent immédiatement les formules inverses également à détermination unique :

$$(2) \qquad \sigma y_1 = x_2 x_3, \quad \sigma y_2 = x_3 x_1, \quad \sigma y_3 = x_1 x_2.$$

Nous nous proposons d'examiner avec soin ce cas spécial très-important pour ce qui va suivre. A une ligne droite $u_x = 0$ correspond, en vertu de (1), sur E_y une conique

$$(3) \qquad u_1 y_2 y_3 + u_2 y_3 y_1 + u_3 y_1 y_2 = 0,$$

et inversement à une ligne $v_y = 0$ correspond, en vertu de (2), sur

(¹) Elle a d'abord été considérée par MAGNUS : *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie*, Berlin, 1833, et auparavant dans le *Journal de Crelle*, t. 8. Elle l'a été plus tard par STEINER : *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit*, etc. Des transformations quadratiques se trouvent déjà occasionnellement dans PONCELET (*Traité des propriétés projectives des figures*, 1822, p. 198), et PLÜCKER (*Journal de Crelle*, t. 5).

E_x une conique

$$v_1 x_2 x_3 + v_2 x_3 x_1 + v_3 x_1 x_2 = 0;$$

nous voyons que la relation mutuelle des deux plans est absolument la même. Le caractère univoque de cette relation devient évident ainsi qu'il suit. Au point d'intersection de deux lignes $u_x = 0$ et $u'_x = 0$ sur E_x correspondent sur E_y les points d'intersection de la conique (3) avec la conique

$$u'_1 y_2 y_3 + u'_2 y_3 y_1 + u'_3 y_1 y_2 = 0.$$

Mais nous remarquerons que de ces quatre points d'intersection trois sont toujours les mêmes : à savoir les sommets du triangle $y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0$. *Aux droites de l'un des plans correspondent donc sur l'autre des coniques passant par trois points fixes que nous appellerons* points fondamentaux, *et au point d'intersection de deux droites le quatrième point d'intersection mobile des deux coniques correspondantes* ([1]).

Nous pouvons, en général, définir géométriquement cette transformation de la manière suivante : nous poserons en fait que l'ensemble des droites en nombre doublement infini d'un plan correspond à l'ensemble des coniques en nombre doublement infini d'un réseau à trois points fondamentaux fixes. Aux coniques qui passent par un point de l'un des plans répondent alors les droites qui passent par un point de l'autre plan ; à chaque point de l'un des plans correspond par conséquent l'intersection de deux droites (et, par suite, d'une infinité de droites) de l'autre plan, et réciproquement. D'après ces idées, nous pouvons concevoir la représentation algébrique de la transformation d'une manière plus générale, ainsi qu'il suit. Soient Q_1, Q_2, Q_3 et Q'_1, Q'_2, Q'_3 des fonctions quelconques linéaires en y_1, y_2, y_3 ; les deux équations linéaires

$$(4) \qquad \begin{cases} Q_1 x_1 + Q_2 x_2 + Q_3 x_3 = 0, \\ Q'_1 x_1 + Q'_2 x_2 + Q'_3 x_3 = 0 \end{cases}$$

donnent de nouveau notre relation, car en les résolvant nous

([1]) Deux des points fondamentaux ou même tous les trois peuvent être infiniment voisins ; alors toutes les coniques du réseau ont entre elles un contact du premier ou du second ordre.

obtenons [1]

$$\rho x_1 = Q_2 Q'_3 - Q_3 Q'_2, \quad \rho x_2 = Q_3 Q'_1 - Q_1 Q'_3, \quad \rho x_3 = Q_1 Q'_2 - Q_2 Q'_1,$$

et les équations $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ représentent encore en effet trois coniques ayant trois points fixes, les points fondamentaux du plan E_y. L'inversion de ces formules s'obtiendrait en ordonnant les équations (4) suivant les y_i et en résolvant.

Nous désignerons par β_1, β_2, β_3 les trois points fondamentaux du plan E_y, par α_1, α_2, α_3 les trois points fondamentaux de E_x. *Pour ces trois points eux-mêmes, notre transformation n'est plus à détermination unique,* et il se rencontre des points exceptionnels semblables dans toutes les relations univoques d'ordre supérieur. Au point α_1 ($x_2 = 0$, $x_3 = 0$) correspondent en effet, d'après (1) et (2), *tous* les points de la droite $\beta_2\beta_3$ ($y_1 = 0$) sur E_y; et inversement à tout point de cette droite correspond un seul et même point α_1 sur E_x. Mais, comme la droite $\overline{\beta_2\beta_3}$ contient les points β_2, β_3 auxquels correspondent respectivement les droites entières $\overline{\alpha_3\alpha_1}$, $\overline{\alpha_1\alpha_2}$, le théorème d'après lequel à toute droite de l'un des systèmes répond dans l'autre une conique passant par les trois points fondamentaux ne souffre pour la droite $\overline{\beta_2\beta_3}$ aucune exception.

A l'aide de ces remarques, nous pouvons facilement indiquer

---

[1] On peut écrire les équations (4) sous la forme $\Sigma\Sigma a_{ik} x_i y_k = 0$, $\Sigma\Sigma b_{ik} x_i y_k = 0$. Si l'on prend en particulier $a_{ik} = a_{ki}$, $b_{ik} = b_{ki}$ et qu'on fasse coïncider les plans E_x et E_y, deux points correspondants x et y forment un couple de pôles conjugués relativement aux deux coniques $\Sigma\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$, $\Sigma\Sigma b_{ik} x_i x_k = 0$. Les points fondamentaux de l'un des plans coïncident avec ceux de l'autre et forment les sommets du triangle polaire commun aux deux coniques. On obtient une autre représentation géométrique simple de la relation si (dans la situation réunie des deux plans) on place deux points fondamentaux aux points circulaires imaginaires et le troisième à l'origine d'un système rectangulaire de coordonnées. Si nous posons d'après cela

$$\frac{x_1}{x_3} = x + iy, \quad \frac{x_2}{x_3} = x - iy, \quad \frac{y_1}{y_3} = \xi + i\eta, \quad \frac{y_2}{y_3} = \xi - i\eta,$$

ces équations (1) deviennent, pour $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$,

$$x = \frac{\xi}{\rho^2}, \quad y = -\frac{\eta}{\rho^2},$$

équations qui représentent, comme on sait, la transformation appelée *transformation par rayons vecteurs réciproques.*

les modifications que subit une courbe par notre transformation. Il est clair qu'à une courbe C_n sur E_x correspond sur E_y une courbe C'_{2n} dont l'équation se déduit de l'équation de C_n en substituant simplement $y_2 y_3$ à x_1, etc. Mais, comme les droites $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_3\alpha_1$, $\alpha_1\alpha_2$ sont coupées chacune par C_n en n points auxquels correspond toujours le même point (β_1, β_2, ou β_3) sur E_y, C_{2n} passe n fois par chacun des points $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; et ces n branches de C'_{2n} ont toutes un cours séparé si les n points d'intersection de C_n avec les droites fondamentales correspondantes de l'autre plan ont tous une situation distincte les uns par rapport aux autres. Si, au contraire, C_n passe par un point fondamental α_1, une partie fixe, savoir la droite $\overline{\beta_2\beta_3}$ qui correspond à α_1, se sépare de la courbe C'_{2n}, et il reste seulement une courbe de l'ordre $2n-1$ qui ne passe plus que n — fois par β_2 et β_3.

Donc, en général, à une courbe du $n^{\text{ième}}$ *ordre, appartenant à l'un des plans et passant respectivement* k_1, k_2, k_3 *fois par les points fondamentaux* α_1, α_2, α_3 *de celui-ci, correspond sur l'autre plan une courbe de l'ordre* $2n - k_1 - k_2 - k_3$ *passant respectivement* $n-(k_2+k_3)$, $n-(k_3+k_1)$, $n-(k_1+k_2)$ *fois par les points fondamentaux* $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ *de ce dernier plan.* Ainsi, par exemple, à une courbe C_4 ayant un point double en chacun des points $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, correspond une conique qui ne passe pas par β_1, β_2, β_3; et, réciproquement, à une telle conique correspond une courbe C_4 ayant trois points doubles en α_1, α_2, α_3.

Par la généralisation directe de cette idée, nous serons conduits à la définition géométrique d'une transformation générale univoque du plan appelée *transformation rationnelle* ou *transformation Cremona*. C'est en effet Cremona qui a établi le premier cette importante théorie dans toute sa généralité [1]. Nous avons à substituer au système de coniques à trois points fixes un système

---

[1] Dans les deux Mémoires : *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane* (*Memorie dell' Accademia di Bologna*, 2e série, t. II, 1863, et t. V, 1865; reproduits dans le *Journal de Battaglini*, t. I et III. *Voir* les expositions d'ensemble (utilisées pour le texte) de CAYLEY, *On the rational transformations between two spaces* (*Proceedings of the London math. Society*, t. III, 1870; ROSANES : *Ueber rationale Substitutionen* (*Journal de Crelle*, t. 73), et DEWULF, *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. V, p. 207. On trouve des généralisations pour les représentations à déterminations multiples dans WIENER, *Math. Annalen*, t. III, p. 11.

linéaire doublement infini de courbes du $n^{\text{ième}}$ ordre ayant un seul point d'intersection mobile, et, par conséquent, n^2-1 points d'intersection fixes. Mais, d'après notre théorème fondamental sur les systèmes de points d'intersection (p. 131), $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ intersections de deux courbes d'ordre n déterminent complètement les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ intersections restantes. Donc, pour que, n^2-1 points fixes d'intersection étant donnés, on puisse en avoir encore un mobile, il faut nécessairement que ces n^2-1 points fixes aient les uns par rapport aux autres une situation toute spéciale, ou, si l'on veut, que les courbes du système s'y comportent d'une façon particulière, et l'établissement de ces relations est notre tâche essentielle dans ce qui suit. A cela se rattache naturellement une explication sur la nature des fonctions par le moyen desquelles la transformation a lieu, et aussi une autre question, celle de savoir s'il peut exister encore des transformations univoques d'un plan autres que celles qui ont lieu par l'intermédiaire des systèmes précédents de courbes à n^2-1 points fixes.

Soit une transformation rationnelle réversible donnée par les trois équations

$$(5)\qquad \rho y_i = f_i(x_1, x_2, x_3), \quad (i = 1, 2, 3),$$

les f_i étant des fonctions d'ordre n qui n'ont pas de facteur commun et dont le déterminant fonctionnel n'est pas identiquement nul (¹). Admettons que, par suite, à chaque point y soit associé un point x par l'intermédiaire des équations

$$(6)\qquad \sigma x_i = \varphi_i(y_1, y_2, y_3),$$

les φ_i étant des fonctions rationnelles et entières d'ordre ν par rapport aux quantités y.

Aux droites $u_x = 0$ sur E_x correspondent alors sur E_y les courbes du $\nu^{\text{ième}}$ ordre $\Sigma u_i \varphi_i = 0$, et aux droites $v_y = 0$ sur E_y les courbes du $n^{\text{ième}}$ ordre $\Sigma v_i f_i$ sur E_x. Aux points d'intersection de

$$u_x = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma v_i f_i = 0$$

(¹) Dans ce dernier cas, les trois courbes f appartiendraient à un faisceau, p. 97, note 1.

correspondent par suite les points d'intersection de

$$v_y = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma u_i \varphi_i = 0.$$

Mais le nombre de ces intersections doit nécessairement, à cause du caractère à détermination unique supposé à notre relation entre E_x et E_y, être le même dans les deux cas; on a donc $n = \nu$.

Les substitutions univoques réversibles sont du même ordre que leurs inverses.

Si nous cherchons le point x qui correspond à l'intersection de deux droites v et w placées sur E_y, nous avons entre les équations

$$(7) \qquad v_y \equiv \Sigma v_i f_i = 0, \quad w_y \equiv \Sigma w_i f_i = 0, \quad u_x = 0$$

à éliminer les x. Le résultat final qui renferme les u au degré n^2, les v et les w chacun au degré n, donne l'équation du produit des n^2 points d'intersection des courbes (7). Parmi ces derniers doit se trouver le point cherché, dont l'équation est, comme nous savons, représentée par $\Sigma u_i \varphi_i = 0$; l'expression $\Sigma u_i \varphi_i = 0$, si l'on pose en vertu de (7)

$$y_1 = v_2 w_3 - w_2 v_3, \quad y_2 = v_3 w_1 - w_3 v_1, \quad y_3 = v_1 w_2 - w_1 v_2,$$

est nécessairement un facteur du résultat de l'élimination. Mais $\Sigma \varphi_i u_i$ renferme aussi alors les v, w au $n^{\text{ième}}$ ordre; les autres facteurs du résultat ne peuvent donc plus renfermer v ou w, et l'on a ce théorème :

Deux courbes quelconques $\Sigma v_i f_i = 0$ du système se coupent en un seul point mobile et en $n^2 - 1$ points fixes qui sont les points fondamentaux de la transformation. La même chose a naturellement lieu pour le système des courbes $\Sigma u_i \varphi_i = 0$ sur l'autre plan. *Donc toute relation univoque de deux plans est une relation Crémona.* Nous avons maintenant à fixer la position des $n^2 - 1$ points fixes dans les deux plans. Comme aux points d'une droite $v_y = 0$ correspondent un à un les points d'une courbe $\Sigma v_i f_i = 0$, il s'ensuit, d'après un théorème précédent (p. 170), que cette courbe et la droite sont du même genre; c'est-à-dire que *les courbes d'un réseau formant la base d'une transformation à détermination unique sont toutes du genre $p = 0$*; elles possèdent des points

multiples équivalents à $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ points doubles ou de rebroussement. Nous allons montrer maintenant que *ces points multiples se trouvent tous aux points fondamentaux fixes*. Si nous admettons, en effet, que le nombre suffisant ne soit pas réuni en ces points, chaque courbe du réseau doublement infini devrait posséder un point double en dehors des points fixes; mais, comme il n'existe dans un plan qu'un nombre doublement infini de points, cela ne pourrait se présenter que dans l'un des deux cas suivants. *Ou bien* il faudrait que tout point fût un point double, c'est-à-dire que les trois équations

$$\Sigma\nu_i \frac{\partial f_i}{\partial x_1} = 0, \quad \Sigma\nu_i \frac{\partial f_i}{\partial x_2} = 0, \quad \Sigma\nu_i \frac{\partial f_i}{\partial x_3} = 0$$

donnassent pour chaque système de valeurs x_1, x_2, x_3 un système déterminé de valeurs ν_1, ν_2, ν_3, et, par conséquent, en tout un nombre *doublement* infini de systèmes de cette espèce. Mais alors les trois équations se réduiraient à une seule, c'est-à-dire que l'on aurait les égalités

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} : \frac{\partial f_1}{\partial x_2} : \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} : \frac{\partial f_2}{\partial x_2} : \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} : \frac{\partial f_3}{\partial x_2} : \frac{\partial f_3}{\partial x_3},$$

ce qui est en contradiction avec la supposition que f_1, f_2, f_3 ne possèdent pas de facteur commun. *Ou bien* il y aurait un nombre *simplement* infini de systèmes de valeurs x à chacun desquels répondrait un système de valeurs ν, savoir ceux pour lesquels le déterminant fonctionnel des f_i est nul, et tout point semblable x serait un point double pour un nombre simplement infini de courbes du réseau. Mais alors deux courbes de cet ensemble simplement infini auraient quatre de leurs points d'intersection confondus en x, tandis que nous supposons que deux courbes f se coupent en un seul point mobile. Notre proposition se trouve par là démontrée.

Chacun des points fondamentaux communs à toutes les courbes du réseau sera en général équivalent à un nombre d'intersections des deux courbes supérieur à l'unité; néanmoins il ne peut exister de point multiple d'ordre supérieur à $n-1$, car autrement toutes les courbes φ_i seraient décomposables. Si nous admettons, en effet, qu'il y ait parmi les points fondamentaux α_1 points

simples communs à toutes les courbes, α_2 points doubles, α_3 points triples, ..., α_{n-1} points multiples d'ordre $n-1$, tous ces points doivent composer ensemble un système de n^2-1 points, c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$(8) \qquad \alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 + \ldots + (n-1)^2\alpha_{n-1} = n^2 - 1.$$

Nous supposons ici que les courbes φ ne se touchent pas aux points fondamentaux, et que les tangentes d'une courbe quelconque φ ont un cours séparé aux points multiples. Un point dans lequel toutes les courbes φ possèdent un point de multiplicité k sera appelé dans ce qui suit *point fondamental d'ordre k*.

Une seconde relation entre les nombres α_i résulte de la remarque qu'un point multiple d'ordre k à tangentes séparées est toujours équivalent à $\frac{1}{2}k(k-1)$ points doubles. Comme, en effet, le nombre total des singularités doit être égal à $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ (ce qui revient à $p=0$), nous avons

$$(9) \quad \alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)\alpha_{n-1} = \frac{1}{2}(n-1)(n-2),$$

et ensuite, par combinaison avec (8),

$$(10) \quad \alpha_1 + 3\alpha_2 + 6\alpha_3 + \ldots + \frac{1}{2}n(n-1)\alpha_{n-1} = \frac{1}{2}n(n+3) - 2.$$

Pour une valeur déterminée de n on tire de ces deux équations, suivant le nombre de leurs solutions compatibles en nombres entiers, une série déterminée de cas possibles en ce qui concerne la transformation. Des tables ont été données pour cet objet par Cremona et Cayley. De $n=2$ à $n=7$, on a, par exemple :

n	2	3	4	5	6	7
α_1	3	4	6, 3	8, 3, 0	10, 1, 4, 3	12, 2, 0, 5, 3
α_2		1	0, 3	0, 3, 6	0, 4, 1, 4	0, 3, 3, 0, 5
α_3			1, 0	0, 1, 0	0, 2, 3, 0	0, 2, 4, 3, 0
α_4				1, 0, 0	0, 0, 0, 1	0, 1, 0, 1, 0
α_5					1, 0, 0, 0	0, 0, 0, 0, 1
α_6						1, 0, 0, 0, 0

Aux points fondamentaux α donnés sur E_x correspondent sur E_y, non des points individuels, mais des points en nombre infini, ainsi que nous l'a déjà montré l'exemple de la transformation quadratique. Considérons un point fondamental α_1 d'ordre k. Soient ξ_i les coordonnées de ce point, et posons pour un instant

$$v_1 f_1 + v_2 f_2 + v_3 f_3 = a_x^n;$$

nous avons l'équation identique

$$a_\xi^{n-k+1} a_x^{k-1} \equiv 0,$$

tandis que $a_\xi^{n-k} a_x^k = 0$ représente le produit des tangentes au point multiple. Soit ensuite ζ un point du plan; $\xi_i + \lambda\zeta_i$ seront les coordonnées d'un point voisin de ξ dans la direction $\xi\zeta$, si l'on prend λ infiniment petit. Pour $f_i = a_x^{(i)n}$ nous avons donc en première approximation

(11) $$\rho y_i = a^{(i)}\xi^{n-k} a^{(i)}\zeta^k,$$

c'est-à-dire qu'à chaque direction d'avancement partant de ξ correspond sur E_y un point entièrement déterminé; et tandis que ζ accomplit une révolution complète autour du point ξ, tous ces points parcourent une courbe d'ordre k dont l'équation s'obtient par élimination des quantités ζ_i entre les équations (11). Les coordonnées d'un point de cette courbe sont en même temps représentées par (11) comme fonctions rationnelles d'un paramètre, car

nous pouvons admettre entre les ζ_i encore une équation quelconque, par exemple une équation linéaire. Or, une semblable représentation n'est possible, comme nous le verrons plus tard, que pour les courbes du genre $p = 0$. Nous avons en conséquence ce théorème :

A un point fondamental d'ordre k sur E_x *correspond sur* E_y *une courbe d'ordre k et du genre* $p = 0$.

Aux k points d'une courbe du système $\Sigma v_i f_i = 0$ réunis en ξ correspondent d'après cela k points individuels de la droite $v_y = 0$, à savoir les points d'intersection de cette droite avec la courbe d'ordre k qui correspond à ξ.

Les relations de ces courbes, appelées *courbes fondamentales*, avec les points fondamentaux du système $\Sigma u_i \varphi_i = 0$ situés sur le plan E_y présentent une importance particulière. D'abord les équations (8), (9) et (10) ont nécessairement aussi lieu à leur égard, c'est-à-dire que, s'il existe sur E_y β_1 points simples, β_2 points doubles, ..., on a

$$\sum_i i^2 \beta_i = n^2 - 1,$$

$$\sum_i i(i-1)\beta_i = (n-1)(n-2),$$

$$\sum_i i(i+1)\beta_i = n(n+3) - 4.$$

Par combinaison des deux dernières équations il vient ensuite

$$\sum_i i\beta_i = 3n - 3 = \sum_i i\alpha_i.$$

N'attribuons aucune importance particulière aux valeurs des nombres α_i, β_i, et supposons que sur E_x les points fondamentaux rangés suivant leur multiplicité soient des ordres $r_1, r_2, \ldots$, de sorte que $r_1 \geqq r_2 \geqq r_3 \ldots$ et que, de même, les points fondamentaux sur E_y soient des ordres $s_1, s_2, \ldots$, et cela de telle sorte que l'on ait

$$s_1 \geqq s_2 \geqq s_3 \geqq \ldots,$$

Nous pouvons remplacer ces équations par les suivantes :

$$(12) \qquad \begin{cases} \sum_i r_i^2 = n^2 - 1, & \sum_k s_k^2 = n^2 - 1, \\ \sum_i r_i = 3n - 3, & \sum_k s_k = 3n - 3. \end{cases}$$

Alors, si l'on appelle $k^{\text{ième}}$ courbe fondamentale de E_x celle qui correspond au $k^{\text{ième}}$ point fondamental de E_y, on a le théorème qui suit : *La $k^{\text{ième}}$ courbe fondamentale de E_x passe par le $i^{\text{ième}}$ point fondamental de E_x le même nombre de fois que la $i^{\text{ième}}$ courbe fondamentale de E_y passe par le $k^{\text{ième}}$ point fondamental de E_y.*

Soient en effet donnés sur E_x et E_y respectivement deux points fondamentaux A, B et soient F_A, F_B les courbes fondamentales qui leur correspondent; si F_A passe ρ fois par B, à ces ρ directions d'avancement partant de B correspondent ρ points sur F_B; mais ces derniers doivent tous coïncider avec A, parce que A correspond encore à tout point de F_A. Par conséquent F_B passe ρ fois par A, ce qu'il fallait démontrer. De cette démonstration résulte au surplus la vérité du théorème suivant :

Les courbes fondamentales de E_x ont leurs points multiples aux points fondamentaux de E_x.

Désignons maintenant par α_{ik} le nombre qui exprime combien de fois la $i^{\text{ième}}$ courbe fondamentale sur E_y passe par le $k^{\text{ième}}$ point fondamental sur E_y. On a alors, d'après un théorème récemment énoncé, $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$. Entre ces nombre α_{ik} et les nombres r, s existe une série de relations. En premier lieu, le théorème d'après lequel *les courbes fondamentales sont du genre zéro* donne les équations

$$(13) \quad (r_i - 1)(r_i - 2) = \sum_k \alpha_{ik}(\alpha_{ik} - 1), \quad (s_k - 1)(s_k - 2) = \sum_i \alpha_{ik}(\alpha_{ik} - 1).$$

Si deux courbes fondamentales F_A, F'_A du même plan se coupaient ailleurs qu'aux points fondamentaux, au point d'intersection correspondraient les *deux* points A et A' de l'autre plan; par conséquent :

Les courbes fondamentales ne se coupent qu'aux points fonda-

nous pouvons admettre entre les ζ_i encore une équ…
par exemple une équation linéaire. Or, une s…
tion n'est possible, comme nous le verrons … $_{ik}\alpha_{ik'}$.
courbes du genre $p = 0$. Nous avons en c…

A un point fondamental d'ordre … ait coupée par une courbe … points fondamentaux, à un *une courbe d'ordre k et du genre r* … correspondre en même temps un

Aux k points d'une courbe d… point B, ce qui n'est pas possible.
correspondent d'après cela k p…
à savoir les points d'inter… *droites ne sont coupées par les courbes*
d'ordre k qui correspond… *points fondamentaux*. On a par suite

Les relations de ces …
avec les points fond… $\sum_k s_k \alpha_{ik}$, $\quad n s_k = \sum_i r_i \alpha_{ik}$.
plan E_y présentent …
tions (8), (9) e… allons démontrer le théorème suivant :
c'est-à-dire c… *Pour tout … nombre total des branches des courbes fondamentales qui*
doubles, … *passent par un point fondamental est égal au triple de l'ordre de ce dernier diminué d'une unité*; ce qui donne les équations

$$3r_i - 1 = \sum_k \alpha_{ik}, \quad 3s_k - 1 = \sum_i \alpha_{ik}. \tag{16}$$

Il vient ensuite, par combinaison des équations (16) avec (13),

$$r_i^2 + 1 = \sum_k \alpha_{ik}^2, \quad s_k^2 + 1 = \sum_i \alpha_{ik}^2. \tag{17}$$

Pour démontrer le théorème cité en dernier lieu, observons que *les courbes fondamentales du plan E_y forment par leur ensemble la jacobienne du réseau $\Sigma u_i \varphi_i = 0$, et que de même les courbes fondamentales de E_x forment la jacobienne du réseau $\Sigma v_i f_i = 0$.*

La jacobienne est en effet le lieu des nouveaux points doubles de celles des courbes du réseau qui possèdent encore un point double ailleurs que dans les points fondamentaux. Or, ce fait n'est possible que si les courbes dont il s'agit se décomposent, car toutes les courbes du réseau ont déjà le maximum des points multiples possibles. Nous pouvons maintenant construire des courbes décomposables de cette espèce ainsi qu'il suit. Considérons une droite

· fondamental de l'ordre r sur E_x. Il lui
· courbe C_n du réseau $\Sigma u_i \varphi_i = 0$ qui
omposer en la courbe C_r correspon-
en une courbe C_{n-r}. Si maintenant
.u point r, C_r reste fixe tandis que
.ra coupée par C_r en un point mobile
double de la courbe dont il s'agit $C_{(n-r)+r}$,
.st une partie du lieu de ces points doubles,
ie de la jacobienne. Réciproquement, à *toute*
sable du réseau des φ correspond une droite pas-
oint fondamental de E_x. En effet, à une courbe sem-
E_y correspond toujours d'une seule manière une droite;
.a courbe se décomposait, la droite devrait aussi se décompo-
., ce qui n'est pas possible. A une partie de la courbe décomposable doit donc correspondre un point particulier de la droite, c'est-à-dire un point fondamental, ce qu'il fallait démontrer. Or nous avons vu plus haut (p. 101) que la jacobienne possède un point multiple d'ordre $3r - 1$ là où les courbes du réseau ont un point multiple d'ordre r. La formule (16) est donc démontrée.

Au moyen des équations établies on trouve d'autres relations entre les points fondamentaux sur les deux plans. Désignons par ρ le nombre des points r, par σ celui des points s, c'est-à-dire posons

$$\rho = \Sigma \alpha_i, \quad \sigma = \Sigma \beta_i.$$

En sommant maintenant les équations (16) l'une suivant i, l'autre suivant k, ce qui rend les deux seconds membres égaux, il viendra

$$3 \sum_i r_i - \rho = 3 \sum_k s_k - \sigma.$$

Mais, d'après (12), on a $\sum_i r_i = \sum_k s_k$, d'où $\rho = \sigma$. *Le nombre des points fondamentaux dans les deux plans est le même, et l'on a* $\Sigma \alpha_i = \Sigma \beta_i$.

Nous nous proposons aussi de montrer que les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ ne diffèrent des nombres $\beta_1, \beta_2, \ldots$ que sous le rapport de l'ordre et non sous le rapport de la grandeur; qu'ainsi pour tout nombre α_i

il existe un autre nombre égal β_k (¹). Nous donnons cette démonstration un peu longue avec d'autant plus de raison qu'elle repose uniquement sur la numération des constantes et sur certaines considérations de symétrie, qu'elle est ainsi intéressante en elle-même.

Nous pouvons, au moyen des équations (14) et (17), obtenir la valeur du carré du déterminant Δ formé des nombres α_{ik}; car dans les premiers membres de ces équations se trouvent immédiatement les termes individuels de ce carré, c'est-à-dire les expressions qui se présentent comme termes dans le déterminant à $\rho (= \sigma)$ lignes formé en multipliant Δ par lui-même suivant le théorème sur la multiplication des déterminants. La valeur Δ^2 dont il s'agit est, sous le bénéfice de la formule (12), égale aux deux déterminants

$$\begin{vmatrix} r_1^2+1 & r_1 r_2 & r_1 r_3 & \cdots \\ r_2 r_1 & r_2^2+1 & r_2 r_3 & \cdots \\ r_3 r_1 & r_3 r_2 & r_3^2+1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \end{vmatrix} = 1 + \sum_i r_i^2 = n^2$$

$$= \begin{vmatrix} s_1^2+1 & s_1 s_2 & s_1 s_3 & \cdots \\ s_2 s_1 & s_2^2+1 & s_2 s_3 & \cdots \\ s_3 s_1 & s_3 s_2 & s_3^2+1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \end{vmatrix} = 1 + \sum_k s_k^2 = n^2.$$

La valeur absolue du déterminant des α_{ik} est donc égale à n:

$$(18) \qquad \Delta = \pm n.$$

Le signe reste indéterminé parce que l'ordre des lignes dans le déterminant n'a pas besoin d'être complètement déterminé par le rangement des nombres r et s par ordre de grandeur. En effet, parmi eux il peut s'en trouver d'égaux dont la permutation ferait varier le signe de Δ, et il en est toujours ainsi dans les exemples connus jusqu'ici.

(¹) La démonstration de ce théorème, déjà établi par CREMONA, a été donnée par CLEBSCH, *Zur Theorie der Cremona'schen Transformationen* (*Math. Annalen*, t. IV, p. 490). Cette proposition est d'ailleurs (suivant une communication de M. Frahm à M. Lindemann) une conséquence immédiate du théorème donné plus loin sur la possibilité de remplacer la transformation Cremona par des transformations quadratiques.

Nous imaginerons maintenant que le déterminant Δ des α_{ik} est partagé par des lignes horizontales et verticales, de telle sorte que dans chacun des rectangles ainsi formés on n'ait que des lignes horizontales appartenant aux mêmes valeurs de r et des lignes verticales appartenant aux mêmes valeurs de s.

Considérons un de ces rectangles. Aux nombres r qui s'y rencontrent (¹) répond un groupe de points fondamentaux sur E_x, et ce dernier fournit pour la transformation un certain nombre de constantes qui seront employées d'une manière complétement symétrique pour la formation d'un réseau de courbes $\Sigma \nu_i f_i = 0$ sur E_x (²).

La même chose a lieu pour les quantités s qui se rencontrent dans le rectangle; le groupe correspondant de points fondamentaux du plan E_y doit de même dépendre symétriquement des constantes du groupe répondant à r sur E_x, et, réciproquement, *entre les quantités r et les quantités s règne une complète symétrie*. Les quantités α qui figurent dans une ligne verticale de notre rectangle doivent d'après cela se répéter dans les différentes lignes verticales, et cela dans toutes les permutations, et chaque permutation *le*

(¹) La dépendance entre les nombres r_i, s_k qui répondent à l'une des grandeurs α_{ik} est établie par les formules précédentes. Celles-ci peuvent, à l'aide de (18), s'écrire sous une forme encore plus simple. En effet, par résolution de (15) suivant les quantités r, s, il vient

$$\pm r_i = \sum_k s_k \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_{ik}}, \qquad \pm s_k = \sum_i r_i \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_{ik}},$$

et, en faisant usage de ces équations, on tire de (14) et (17) par résolution suivant les α_{ik} (dans l'hypothèse de i' ou k' constant)

$$r_i s_k = n\alpha_{ik} \mp \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_{ik}}.$$

(²) Une transformation Cremona est, d'une manière générale, caractérisée par un certain nombre de constantes absolues qui ne peuvent dépendre que des points fondamentaux, puisque le réseau des φ est complétement déterminé par ces derniers. Si l'on considère les modifications projectives des deux plans (lesquelles dépendent de huit constantes) comme non substantielles, on peut, sans changer le caractère de la transformation, assigner dans chaque plan des positions quelconques à quatre points fondamentaux, et considérer alors comme constantes propres de la transformation les $2\rho - 8$ rapports anharmoniques de faisceaux de rayons dirigés de deux des quatre points semblables sur les trois autres et sur un cinquième point fondamental. Ce sont là les *invariants absolus* de la transformation en ce sens qu'ils sont invariables par toute modification projective.

même nombre de fois. Soient k le nombre des éléments d'une ligne verticale du rectangle, p le nombre de leurs permutations, l le nombre des éléments dans une ligne horizontale, q le nombre de leurs permutations : on aura

$$l = \mu p, \tag{19}$$

μ étant un nombre entier, et il en résulte de même, si l'on change le rôle des lignes horizontales et verticales,

$$k = \nu q, \tag{20}$$

ν étant un nombre entier. Le nombre des permutations sera toujours plus grand que celui des éléments, excepté :

1° Si tous les éléments sont égaux, cas où le nombre des permutations est égal à 1 ;

2° Si tous les éléments sont égaux les uns aux autres à l'exception d'un seul, cas où le nombre des permutations est égal au nombre des éléments.

Ces deux cas provisoirement exclus, les équations (19) et (20) sont impossibles, car elles exigeraient simultanément que k fût $> l$ et $l > k$. Dans le premier cas, au contraire, nous avons $p = 1$, $q = 1$, et par suite k et l quelconques; dans le second, nous avons $p = k$, $q = l$, d'où $l = \mu k$, $k = \nu l$. Il faut donc que l'on ait $\mu = \nu = 1$, $k = l$. Le rectangle devient un carré. De là ce théorème :

Dans les rectangles de Δ qui sont déterminés par des groupes où les quantités r et s sont égales respectivement, les éléments a sont toujours égaux entre eux; ce n'est que dans le cas unique où le rectangle est un carré qu'il peut se présenter dans chaque ligne horizontale et verticale un terme différent des autres. Ces termes sont alors égaux entre eux, et par inversion des lignes on peut en remplir l'une des diagonales du carré.

On peut d'ailleurs montrer toujours par des raisons de symétrie que dans la représentation du déterminant entier deux carrés semblables ne peuvent se trouver à côté ou au-dessous l'un de l'autre. (*Voir* Clebsch, *loc. cit.*) D'où cette proposition :

A tout groupe de r ne peut répondre au plus qu'un groupe des renfermant un nombre égal d'éléments et conduisant, ensemble

avec le premier, dans l'intérieur de Δ, *à un carré de* α_{ik} *dont les éléments ne sont pas tous égaux à la fois.*

Mais, d'un autre côté, il existe nécessairement *au moins* un groupe de cette nature, car autrement au groupe des r correspondraient des rectangles renfermant des éléments égaux, et le déterminant des α s'évanouirait, tandis que sa valeur d'après (18) est égale à $\pm n$.

Ce n'est que dans le cas où le groupe des r se réduit à une seule quantité r que cette conclusion n'est pas vérifiée. A tout groupe de r renfermant plus d'une de ces quantités répond un groupe de s d'égale grandeur, et réciproquement. En en faisant abstraction, il ne reste plus que des quantités r ou s différentes entre elles; mais le nombre de ces quantités r est nécessairement égal à celui des quantités s dont nous parlons. Nous avons ainsi démontré notre proposition, c'est-à-dire ce théorème :

Les nombres α_i *qui indiquent combien de quantités r deviennent chaque fois égales les unes aux autres, et les nombres* β_i *qui indiquent combien de quantités s deviennent chaque fois égales les unes aux autres, ne diffèrent au maximum que par l'arrangement et non par la grandeur.*

Nous avons ainsi, par exemple, dans le tableau précédent, pour $n = 6$, une transformation

$$\alpha_1 = 4, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 3, \quad \alpha_4 = 0, \quad \alpha_5 = 0,$$

et une autre

$$\alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 4, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = 1, \quad \alpha_5 = 0.$$

D'après notre proposition, chacune des deux est la transformation inverse de l'autre, excepté dans les cas spéciaux où chacune est sa propre inverse. Il en est toujours ainsi conformément au tableau pour les transformations qui vont de $n = 2$ à $n = 5$. Pour ces transformations d'ordre inférieur notre théorème n'exprime donc rien du tout.

Enfin, le théorème suivant est d'une importance fondamentale pour cette théorie :

La somme des nombres qui expriment l'ordre des trois points

fondamentaux les plus élevés d'une transformation du $n^{ième}$ ordre est plus grande que n, c'est-à-dire que l'on a

$$r_1 + r_2 + r_3 > n,$$

relation où, d'après nos hypothèses précédentes, $r_1 \geqq r_2 \geqq r_3 \geqq r_4 \geqq \ldots$

Nous avons, en effet, en vertu de (12), les équations

$$(21) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum_i{}' r_i^2 + r_3^2 = n^2 - 1 - r_1^2 - r_2^2, \\ &\sum_i{}' r_i + r_3 = 3n - 3 - r_1 - r_2, \end{aligned} \right.$$

le signe sommatoire Σ' se référant à tous les indices i, excepté $i = r_1, r_2, r_3$. Nous nous proposons de montrer qu'il est ***impossible*** que l'on ait

$$n \geqq r_1 + r_2 + r_3.$$

Multiplions la seconde des équations (21) par r_3 et retranchons-en la première; il vient

$$r_3 \sum_i{}' r_i - \sum_i{}' r_i^2 = r_3(3n - 3 - r_1 - r_2) - n^2 + 1 + r_1^2 + r_2^2.$$

Mais dans le premier membre figure une expression positive, à cause de $r_3 \geqq r_4 \ldots$ et nulle uniquement pour $r_3 = r_4 = r_5 = \ldots$. Nous avons donc pour le second membre

$$r_3(3n - 3 - r_1 - r_2) \geqq n^2 - 1 - r_1^2 - r_2^2.$$

En admettant maintenant que l'on ait $n \geqq r_1 + r_2 + r_3$, nous obtenons

$$r_3(3r_3 - 3 + 2r_1 + 2r_2) \geqq r_3^2 + 2(r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1) - 1$$

ou

$$2r_3^2 - 2r_1 r_2 - 3r_3 + 1 \geqq 0;$$

or, cela est impossible, car on a par hypothèse $r_1 r_2 \geqq r_3^2$ et $3r_3 > 1$, puisque r_3 doit être au moins égal à 1. Nous avons donc fourni la démonstration demandée.

Ce théorème sur la multiplicité des trois points fondamentaux les plus élevés acquiert une aussi grande importance à cause du

corollaire suivant. Faisons subir au plan E_x une transformation quadratique dont les trois points fondamentaux coïncident avec r_1, r_2, r_3. Par ces derniers, toute courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre du réseau $\Sigma \nu_i f_i = 0$ passe respectivement r_1, r_2, r_3 fois; à chacune d'elles correspond donc, d'après la règle donnée plus haut pour la transformation quadratique, une courbe de l'ordre $2n - r_1 - r_2 - r_3$ sur le nouveau plan E_z, et toutes ces courbes forment encore un réseau ayant un point d'intersection mobile, car les droites du plan E_y leur correspondent une à une par l'intermédiaire du plan E_x. La relation directe entre E_y et E_z est d'après cela établie par des fonctions de l'ordre $2n - r_1 - r_2 - r_3$. Or, on a $r_1 + r_2 + r_3 > n$, et par suite en toute hypothèse

$$2n - r_1 - r_2 - r_3 < n;$$

c'est-à-dire que la transformation originaire est ramenée à une autre d'ordre moins élevé. On peut procéder de la même manière à l'égard de cette dernière, jusqu'à ce que l'on arrive finalement à une transformation quadratique ou à une transformation linéaire, et inversement on doit, par application réitérée des transformations quadratiques, revenir à la transformation originaire. Nous avons donc la proposition suivante :

Toute transformation Cremona peut être remplacée par une suite de transformations quadratiques, les trois points fondamentaux d'une transformation de cette nature étant placés aux points de base les plus élevés du système des courbes de transformation (¹).

Soit, par exemple, une transformation du quatrième ordre dans laquelle

$$\alpha_1 = 6, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1.$$

(¹) Ce théorème a été trouvé à peu près dans le même temps par Clifford (qui l'a donné sans démonstration; *voir* le Mémoire cité de Cayley), par Nöther (*Math. Annalen*, t. III, p. 164), et par Rosanes (*loc. cit.*). L'inégalité $n < r_1 + r_2 + r_3$ et le théorème sur la composition des transformations sont encore vrais lorsque plusieurs des points fondamentaux se rapprochent infiniment les uns des autres, ce qui n'a pas été considéré dans le texte; *voir* Nöther, *Math. Annalen*, t. V, p. 635. La possibilité de la transformation mentionnée résulte aussi de considérations sur les courbes de l'espace; *voir* Halphen, *Sur certaines perspectives gauches des courbes planes algébriques* (*Comptes rendus*, 15 mars 1875).

Nous placerons les trois points fondamentaux d'une transformation quadratique au point triple et en deux des points simples. Nous arrivons ainsi à des courbes du troisième ordre ayant un point double qui provient de ce que la ligne joignant les deux points fondamentaux simples (courbe fondamentale linéaire de la transformation quadratique) est encore rencontrée par la courbe C_4 en deux points. Nous avons donc une transformation du troisième ordre dans laquelle $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 1$. Actuellement, en faisant usage de deux points α_1 et du point α_2 pour une nouvelle transformation quadratique, nous obtenons des courbes du deuxième ordre à trois points fondamentaux simples, comme cela devait être.

De même que nous avons étudié plus haut les courbes sous le rapport de leurs propriétés qui restent invariables par toute transformation *linéaire*, de même on peut, ainsi que nous l'avons déjà observé, rechercher les propriétés des courbes, ou en général des figures planes, qui persistent dans toute transformation Cremona, et d'un autre côté étudier la manière dont ces propriétés sont influencées par la transformation. Dans cet examen, on peut, en vertu de nos dernières réflexions, se borner à considérer les transformations quadratiques. Nous avons déjà parlé plus haut des modifications que subissent les singularités d'une courbe particulière dans une transformation de cette nature, en tant au moins que ces modifications se produisent aux points fondamentaux de la transformation (p. 192). Or, il n'existe pas d'autres modifications que celles mentionnées alors. *Si, en effet, la courbe C_n a en dehors des points fondamentaux un point double* P *sur* E_x, *à ce point double répond un point double* P' *de la courbe correspondante* C' *sur* E_y. C'est là une conséquence immédiate du caractère univoque de notre transformation, car, par suite de ce caractère, à toute direction d'avancement sur C_n partant de P doit répondre une seule direction d'avancement partant de P' sur C'. Un fait analogue a lieu pour les points multiples d'ordre plus élevé. Ici se présente en première ligne le théorème sur la *conservation du genre* (p. 170), théorème que l'on établit aussi directement sans difficulté pour les transformations quadratiques. Supposons qu'à une courbe C_m sur E_x réponde sur E_y une courbe C_μ. On aura $\mu = 2m - k_1 - k_2 - k_3$, si C_m passe respectivement

k_1, k_2, k_3 fois par les trois points fondamentaux sur E_x, et C_μ passe respectivement $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ fois par les points fondamentaux sur E_y si $\varkappa_1 = m - k_2 - k_3$, $\varkappa_2 = m - k_3 - k_1$, $\varkappa_3 = m - k_1 - k_2$.

De ces relations résulte directement l'identité

$$\frac{1}{2}(m-1)(m-2) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=3} k_i(k_i-1) = \frac{1}{2}(\mu-1)(\mu-2) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=3} \varkappa_i(\varkappa_i-1).$$

Mais le genre des deux courbes ne diffère de ces deux expressions que d'un nombre dépendant uniquement des points multiples non situés aux points fondamentaux, et ces points multiples sont les mêmes pour les deux courbes. Les deux courbes appartiennent donc au même genre, ce qui était à démontrer.

On peut au surplus démontrer facilement aussi l'influence d'une transformation du $n^{\text{ième}}$ ordre sur C_m ; on arrive, au moyen des principes développés plus haut, à la proposition suivante :

A une courbe C_m de E_x, passant l_i fois par un point fondamental r_i, correspond $\left(\mu \text{ étant égal à } nm - \sum_i r_i l_i\right)$ une courbe C_μ qui passe λ_k fois par chaque point fondamental s_k, λ_k étant égal à $ms_k - \sum_i r_i \alpha_{ik}$.

Au moyen de ces formules on pourrait encore prouver l'égalité du genre, mais nous n'insisterons pas, parce que dans les transformations à détermination unique pour certaines courbes seulement nous parlerons en détail de faits semblables.

Pour donner des exemples d'autres propriétés qui persistent dans la transformation Cremona, observons que deux courbes qui se touchent se transforment nécessairement en deux courbes qui sont également tangentes (et que l'ordre du contact est le même), ou en d'autres termes qu'à tout groupe de points voisins sur l'une des courbes répond sur la courbe transformée un groupe de même nature.

Il résulte, par exemple, de là que la courbe de coïncidence qui répond à une correspondance donnée sur une courbe f possède la propriété de l'invariance non-seulement vis-à-vis des transformations

linéaires, mais encore vis-à-vis des transformations Cremona (¹).

Nous considérerons dans ce qui suit une application de la théorie developpée ici. L'observation que, dans une transformation Cremona, à tout point multiple d'une courbe pris pour point fondamental correspondent sur la nouvelle courbe des points séparés, peut servir *à transformer une courbe donnée ayant des points singuliers quelconques en une autre courbe qui ne possède que des points multiples ordinaires* (c'est-à-dire des points multiples à tangentes séparées). Par des transformations de cette espèce la singularité du point multiple considéré sera, ce qui est important, décomposée en différentes *classes*, d'une manière analogue à ce que nous avons vu dans la méthode de Newton, Cramer et Puiseux (²). Si dans les recherches en question nous employons uniquement des transformations quadratiques, il n'y a là néanmoins aucune particularisation, puisque toutes les transformations Cremona ont ces dernières pour éléments (p. 207).

Pour la discussion approfondie des faits dont il s'agit, admettons *en premier lieu* que la courbe considérée C possède en P un point multiple d'ordre i à tangentes séparées. Appliquons à C la transformation quadratique

$$(22) \qquad y_1 : y_2 : y_3 = x_2 x_3 : x_3 x_1 : x_1 x_2,$$

dont le point fondamental ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) sera supposé situé en P. Au point P de C correspondent sur la nouvelle courbe C' i points séparés sur la droite $y_3 = 0$ (p. 191), et la singularité de P est par suite épuisée.

Supposons *en second lieu* que toutes les i branches de C se confondent en P, mais néanmoins de telle sorte que deux branches quelconques n'aient entre elles qu'un contact simple, et par conséquent ne se confondent qu'au premier ordre d'infiniment petits. L'équation de notre courbe C supposée d'ordre n sera

$$C \equiv (\varkappa_1 x_1 + \varkappa_2 x_2)^i x_3^{n-i} + f_{i+1}(x_1, x_2) x_3^{n-i-1} + \ldots + f_n(x_1, x_2) = 0.$$

(¹) *Voir* les exemples relatifs à de semblables courbes, p. 154, 156, 160 et p. 171, note 1.

(²) *Voir*, pour ce qui suit, Nöther, *Göttinger Nachrichten*, 1871, p. 267, et *Math. Annalen*, t. IX. La possibilité de la transformation citée se déduit aussi de considérations sur les courbes de l'espace. *Voir* Halphen, *Sur certaines perspectives gauches des courbes planes algébriques* (*Comptes rendus*, 15 mars 1875).

et par la transformation quadratique précédente elle devient

$$C' \equiv (x_1 y_2 + x_2 y_1)^i y_1^{n-i} y_2^{n-i} + f_{i+1}(y_2, y_1) y_1^{n-i-1} y_2^{n-i-1} y_3 + \ldots = 0.$$

Cette courbe a, comme répondant au point P de C, i points consécutifs communs avec $y_3 = 0$ au point de rencontre de cette ligne avec la droite $x_1 y_2 + x_2 y_1 = 0$, *sans* y avoir de point *multiple;* une séparation nouvelle de ces points voisins n'est donc possible par aucune transformation rationnelle. Nous disons maintenant que la réduction subie par la classe $n(n-1)$ de C, par suite de la singularité P, est égale à $i(i-1) + i - 1$. *L'influence de la singularité sur la classe est donc la même que si le point singulier* P *était remplacé par* $\frac{1}{2} i(i-1)$ *points doubles ordinaires, parmi lesquels seraient compris* $i-1$ *points de rebroussement;* et, conformément à cette idée, nous nous exprimerons souvent comme si la singularité avait pris naissance par le rapprochement graduel des singularités simples précitées [1]. Pour le démontrer, observons qu'aux lignes menées par le point $Q(x_1 = 0, x_3 = 0)$ correspondent sur le plan E_y les lignes droites passant par le point

$$Q'(y_1 = 0, y_3 = 0),$$

tandis qu'en général à une droite sur E_x correspond une conique sur E_y, et réciproquement. Or, comme les points voisins de C se transforment en points voisins de C', le nombre des tangentes que l'on peut mener de Q à C sera nécessairement égal au nombre de celles menées de Q' à C', les tangentes qui ont leur point de contact en Q' même ne devant pas être comptées. Il est également aisé de justifier directement cette proposition à l'aide des propositions ci-dessus (*voir* p. 192). En effet, la courbe C passe i fois par le point fondamental $x_1 = 0, x_2 = 0$, et ne passe au contraire pas par les deux autres points fondamentaux ; la courbe C' est donc de l'ordre $2n - i$ et a au point $y_1 = 0, y_2 = 0$ un point multiple d'ordre n, tandis qu'elle a en chacun des deux autres points fondamentaux un point multiple d'ordre $n - i$, tous à tangentes séparées. Si maintenant δ désigne l'influence que tous les

---

(1) Il n'est d'ailleurs nullement démontré par notre résolution d'un point singulier qu'un point semblable puisse être remplacé dans *tous* les problèmes qui se présentent par les singularités simples qui s'en déduisent.

autres points singuliers de C′ (lesquels existent également dans C) exercent sur la classe de C′, cette dernière devient

$$k' = (2n-i)(2n-i-1) - \delta - n(n-1) - 2(n-i)(n-i-1).$$

En vertu de la multiplicité énoncée du point Q′, le nombre des tangentes menées de ce point à C′ est égal à

$$k' - 2(n-i) = n(n-1) - \delta - i(i-1).$$

Mais ce nombre est égal à la classe de C augmentée du nombre des points de rebroussement réunis en Q; donc, puisque Q n'a pas été pris sur C, il est en fait égal au nombre des droites passant par Q qui rencontrent C en deux points voisins. Notre proposition intermédiaire est ainsi démontrée.

Parmi les $k' - 2(n-i)$ tangentes issues de Q′, la ligne $y_3 = 0$ est comprise $i - 1$ fois, car sur elle sont situés i points voisins de C′. Mais ces derniers proviennent du point P en vertu de la transformation; la ligne Q′P′ compte donc de même $i - 1$ fois comme tangente de C, c'est-à-dire que *la classe de* C *est*

$$k = n(n-1) - \delta - i(i-1) - (i-1) \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Admettons *en troisième lieu* que le coefficient de x_3^{n-i} dans C renferme le facteur $\varkappa_1 x_1 + \varkappa_2 x_2$ à la $l^{\text{ième}}$ puissance $(l \leqq i)$; les autres facteurs de x_3^{n-i} peuvent aussi se décomposer en différents groupes à valeurs multiples, ce qui nécessiterait une étude tout à fait analogue; mais, dans tous les cas, l'examen suivant de la relation de f vis-à-vis du facteur multiple d'ordre l dont il a été parlé est indépendant de cette question. Nous admettons, d'ailleurs, que le facteur $\varkappa_1 x_1 + \varkappa_2 x_2$ entre dans le coefficient de x_3^{n-i-r}, c'est-à-dire dans $f_{i+r}(x_1, x_2)$, pour $r = 1, 2, \ldots, l_1$ au moins $l_1 - r$ fois, avec l'hypothèse $l_1 \leqq l$. Alors dans C′ le premier terme de l'ordre l s'évanouit et tous les termes suivants sont nuls à l'ordre l_1. La nouvelle courbe C′ a donc, au point d'intersection de $y_3 = 0$ avec $\varkappa_2 y_1 + \varkappa_1 y_2 = 0$, un point multiple d'ordre l_1 dont, en général, les branches ne seront pas toutes tangentes à la ligne $y_3 = 0$. Par ce point multiple seront absorbées l_1 des l intersections de $y_3 = 0$ avec C′ qui y sont situées, et il n'en reste plus que $l - l_1$ voisines les unes des autres. Donc, d'une manière tout à fait analogue à ce qui se passait au cas précedent, le point P de C, tant qu'il s'agit

des l branches par nous considérées, est équivalent à $\frac{1}{2}l(l-1)$ points doubles, parmi lesquels se trouvent $l-l_1$ points de rebroussement, et à un point multiple d'ordre l_1-1. Ce dernier est équivalent à $\frac{1}{2}l_1(l_1-1)$ points doubles si ses l_1 tangentes sont toutes distinctes les unes des autres; dans ce cas, la recherche de la branche multiple d'ordre l_1 que nous considérions est terminée. Dans le cas contraire le point multiple doit être soumis à un plus ample examen. Cet examen se fait absolument de même, en modifiant la courbe C' par une transformation quadratique dont un point fondamental est situé au point multiple d'ordre l_1, et ainsi de suite. Géométriquement, on doit se figurer la singularité de P comme étant telle que parmi les i branches l coïncident, que parmi ces dernières l_1 ont encore en commun un autre point voisin, que par suite *un point multiple d'ordre l_1 s'est infiniment rapproché du point multiple d'ordre i, et cela dans une direction suivant laquelle l tangentes du point d'ordre i se confondent.*

Cette considération est justifiée, au moins pour les problèmes qui ne sont pas influencés au fond par les transformations à détermination unique.

Un problème de cette espèce est celui de la détermination de la classe de C; on peut effectuer cette détermination comme on l'a fait précédemment à l'aide des deux points Q et Q'. Si nous supposons que les autres $i-l$ branches du point multiple P ne donnent pas lieu à d'autres recherches et que les tangentes du point multiple d'ordre l_1 récemment trouvé ne coïncident pas par groupes, la classe de C' sera

$$k' = (2n-i)(2n-i-1) - \delta - n(n-1)$$
$$- 2(n-i)(n-i-1) - l_1(l_1-1).$$

La classe k de la courbe C est égale au nombre des tangentes qui peuvent être menées de Q' à C', et qui sont différentes des $n-i$ tangentes du point multiple d'ordre $n-i$ en Q' (chacune de ces tangentes comptant double) et de la ligne $y_3=0$. Or, dans le cas actuel, une branche du point multiple d'ordre l_1 touche la ligne $y_3=0$, et cette branche est de l'ordre $l-l_1$; donc $l-l_1$ des k'

tangentes issues de Q′ coïncident avec $y_3 = 0$. On a en conséquence

$$(23) \qquad \begin{cases} k = k' - 2(n-i) - (l-l_1) \\ \quad = n(n-1) - \delta - i(i-1) - l_1(l_1-1) - (l-l_1). \end{cases}$$

Donc, ici encore, la classe se détermine conformément à la définition géométrique du point singulier que nous avons récemment donnée.

Nous éclaircirons ce qui précède par l'exemple suivant. Supposons une courbe du $2n^{\text{ième}}$ ordre à point multiple d'ordre $2n-2$ en P ($x_1 = 0, x_2 = 0$) donnée par l'équation

$$C \equiv x_3^2 [f_{n-1}(x_1, x_2)]^2 + f_{2n}(x_1, x_2) = 0,$$

l'indice inférieur de f indiquant encore l'ordre des deux fonctions homogènes f en x_1, x_2. En effectuant la transformation (22), nous obtenons la courbe

$$C' \equiv y_1^2 y_2^2 [f_{n-1}(y_2, y_1)]^2 + f_{2n}(y_2, y_1) \cdot y_3^2 = 0.$$

Au point singulier de C correspondent sur C′ les $n-1$ *points doubles ordinaires* déterminés par $y_3^2 = 0$ et $f_{n-1}(y_2, y_1) = 0$. Il se forme donc d'abord $n-1$ classes dont chacune se décompose ensuite en deux points, c'est-à-dire que C a en P un point multiple d'ordre $2(n-2)$ à $n-1$ tangentes séparées sur chacune desquelles est encore situé un point double voisin de P, en d'autres termes, au point P se trouvent $n-1$ contacts de la courbe C avec elle-même (p. 39). Le nombre des points doubles séparés auxquels équivaut P est donc finalement égal à

$$\frac{1}{2}(2n-2)(2n-3) + n - 1 = 2(n-1)^2.$$

On voit clairement par ce qui précède comment en continuant ce procédé, on arrivera enfin, après un nombre *fini* d'opérations, à une courbe ne possédant que des points ordinaires voisins les uns des autres ou séparés; en effet, deux branches de courbes ne peuvent se rencontrer qu'en un nombre *fini* de points voisins. Actuellement, pour simplifier le langage, nous exprimerons la dégénération d'un point double en un point de rebroussement en disant

que *du point double s'est rapproché un point de ramification* (¹). Nous avons alors la proposition suivante :

Tout point multiple d'ordre i d'une courbe algébrique peut, par des transformations Cremona, être résolu en un point multiple ordinaire d'ordre i, auquel s'adjoignent de la manière précédente un nombre déterminé de points de ramification, et en une série de points multiples d'ordre $l_1, l_2, \ldots$ (la somme $l_1 + l_2 + \ldots$ étant inférieure ou égale à i), qui renferment chacun un certain nombre de points de ramification.

La résolution du point multiple effectuée ici est en connexion étroite avec la règle de Cramer précédemment énoncée, et avec les développements en série par lesquels la singularité en question pouvait être de même définie. En effet, ces derniers développements ont été aussi obtenus par des transformations successives; toutefois celles-ci n'étaient univoques que pour le voisinage du point considéré et non pour tout le plan (comme, par exemple, la transformation $x = x'^{\beta}, y = y'^{\alpha}$, p. 35). On peut, du reste, arriver également par des transformations *quadratiques* successives aux développements en série que fournit la méthode de M. Puiseux; toutefois nous n'entrerons pas ici dans l'examen des détails nécessaires (²).

(¹) Cette dénomination est empruntée à la théorie des surfaces de Riemann. Les points de ramification de celles-ci correspondent, en effet, aux points de contact des tangentes proprement dites menées du point à l'infini sur l'axe Y à la courbe. Mais, parmi ces dernières, l'une se rapproche indéfiniment du point double (d'après les formules de Plücker) si ce dernier devient un point de rebroussement, de sorte que tout point de rebroussement donne lieu à un point de ramification de la surface de Riemann.

(²) *Voir* sur ce sujet Nöther (*loc. cit*), § 3. Il est avantageux, pour le cas dont il s'agit, d'employer la transformation quadratique spéciale

$$x_1 : x_2 : x_3 = y_1 y_3 : y_1 y_2 : y_3^2,$$

dont deux des trois points fondamentaux sont situés infiniment près l'un de l'autre. Elle donne pour $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = 1; y_1 = x', y_2 = y', y_3 = 1$ la substitution $x = x', y = x'y'$ employée par Hamburger (*Zeitschrift* de Schlömilch, t. XVI, p. 474 et suiv.), et Königsberger (*Theorie der elliptischen Functionen*, Leipzig, 1874, p. 474 et suiv.).

Smith a, dans ces derniers temps, donné une théorie approfondie des points singuliers basés sur la méthode de Puiseux, et a aussi déterminé directement leur influence sur les formules de Plücker (voir *Proceedings of the London mathematical*

Nous appliquerons dans ce qui suit les résultats obtenus *à la théorie des formules de Plücker.*

Pour déterminer la classe d'une courbe C possédant des singularités quelconques, il faut la transformer d'après ce qui précède. Si nous supposons que l'on a ainsi trouvé que les points singuliers de C sont équivalents à un certain nombre de points multiples d'ordre q_i ($i = 1, 2 \ldots,$) dont chacun ne possède que des tangentes séparées, et que le nombre total des points de ramification qui sont réunis aux différents points singuliers soit égal à $\varkappa$, *on aura pour la classe de* C

$$(24) \qquad k = n(n-1) - \Sigma q_i(q_i - 1) - \varkappa,$$

ainsi qu'on le déduit facilement de la continuation du procédé employé dans l'équation (23). On reconnaît par là que l'ensemble des points singuliers est équivalent à d points doubles et r points de rebroussement si

$$(25) \qquad d = \frac{1}{2}\Sigma q_i(q_i - 1) - \varkappa, \quad r = \varkappa.$$

En effet, il vient alors

$$(26) \qquad k = n(n-1) - 2d - 3r.$$

On peut, par des considérations corrélatives des précédentes au point de vue dualistique, exprimer inversement n par k. On doit dans ce but remplacer la courbe C par la courbe réciproque K, c'est-à-dire par celle qui en dérive au moyen d'une transformation dualistique (t. I, p. 329). Aux tangentes multiples de C correspondent des points multiples de K; ces derniers devront être résolus suivant notre méthode par des transformations rationnelles. En admettant qu'ils aient été ainsi trouvés équivalents à $\varkappa'$ points de ramification et à un certain nombre de points multiples ordinaires d'ordre q'_i, la classe de K, *c'est-à-dire l'ordre de* C, sera donnée par

$$(27) \qquad \begin{cases} n = k(k-1) - \Sigma q'_i(q'_i - 1) - \varkappa' \\ = k(k-1) - 2t - 3w, \end{cases}$$

Society, t. VI, p. 153; 1876. Des recherches semblables ont été poursuivies par M. Halphen; elles n'ont été jusqu'ici publiées que par extraits : *Comptes rendus*, t. LXXVIII, p. 1105, 1874, et t. LXXX, p. 97; 1875.

relation où

$$t = \frac{1}{2}\Sigma q'_i(q'_i - 1) - \varkappa', \quad w = \varkappa'. \tag{28}$$

Enfin on peut montrer que les nombres n, k, d, r, t, w satisfont à l'équation dualistique par rapport à elle même

$$(n-1)(n-2) - 2d - 2r = (k-1)(k-2) - 2t - 2w, \tag{29}$$

qui s'est présentée aussi dans les nombres pluckériens (p. 65). Pour le vérifier, nous ferons usage d'un théorème dont nous avons déjà parlé plusieurs fois et que nous démontrerons plus tard d'une manière approfondie ; ce théorème est le suivant :

Deux courbes liées point par point l'une à l'autre par une relation univoque (à détermination unique) et dont chacune ne possède comme singularités que des points multiples ordinaires, appartiennent au même genre.

Déterminons d'abord le genre p de la courbe C' dont la classe a été donnée par (23). Les singularités de C' auxquelles se réfère le nombre δ qui figure dans cette relation exerceront sur le genre de C' une influence égale, par exemple, à δ' ; on aura alors

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}(2n-i-1)(2n-i-2) - \delta' \\ &\quad - \frac{1}{2}n(n-1) - (n-i)(n-i-1) - \frac{1}{2}l_1(l_1-1) \\ &= \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \delta' - \frac{1}{2}i(i-1) - \frac{1}{2}l_1(l_1-1). \end{aligned}$$

On peut d'une manière semblable calculer le genre de la courbe après chaque transformation. On a finalement une courbe C' ne possédant que des singularités ordinaires et dont le genre se trouve égal à

$$\left\{ \begin{aligned} p &= \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \frac{1}{2}\Sigma q_i(q_i - 1) \\ &= \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - d - r. \end{aligned} \right. \tag{30}$$

Nous définissons ce nombre comme le genre de la courbe C. Nous

y sommes autorisés si nous démontrons que le nombre dont il s'agit est dualistique à lui-même conformément à l'équation (29) ([1]).

La courbe réciproque désignée par K peut être transformée en une courbe K′ n'ayant que des points multiples ordinaires; alors son genre est, d'après la définition qui vient d'être donnée, égal au genre de K′, c'est-à-dire égal à

$$\frac{1}{2}(k-1)(k-2)-\frac{1}{2}\Sigma q'_i(q'_i-1).$$

Or, K′ est lié à K et conséquemment aussi à C et C′, par une relation à détermination unique; le théorème cité plus haut sur l'égalité du genre est donc applicable aux courbes C′ et K′, et l'on a par suite aussi

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}(k-1)(k-2)-\frac{1}{2}\Sigma q'_i(q'_i-1) \\ &= \frac{1}{2}(k-1)(k-2)-t-w, \quad \text{C. Q. F. D.} \end{aligned}$$

En résumant ce qui précède, nous arrivons au théorème suivant énoncé d'abord par Cayley ([2]) :

En tant qu'il s'agit des formules de Plücker, tous les points singuliers d'une courbe algébrique peuvent être considérés comme équivalents à d points doubles et r points de rebroussement, et de même toutes les tangentes singulières peuvent être considérées comme équivalentes à t tangentes doubles et w tangentes d'inflexion, les nombres d, r, t, w étant déterminés de la manière indiquée par les formules (25) *et* (28). *Les formules de Plücker sont alors données par* (26), (27) *et* (29) *ou par*

$$\begin{aligned} 2p-2 &= k+r-2n \\ &= n+w-2k \\ &= n(n-3)-2d-3r \\ &= k(k-3)-2t-3w. \end{aligned}$$

([1]) Le fait que le nombre p reste invariable dans toutes les transformations univoques se conclut immédiatement de considérations semblables à celles appliquées dans ce qui suit aux courbes C et K. Sur la détermination de p, *voir* aussi HALPHEN, *Sur un point de la théorie des fonctions abéliennes* (*Comptes rendus*, 29 juin 1874).

([2]) *Voir* le Mémoire déjà cité de CAYLEY, *Quarterly journal*, t. VII.

Il est à remarquer que les nombres t, w dans ces formules ne donnent pas immédiatement le nombre des tangentes singulières ordinaires de C; car les tangentes des différentes branches d'un point singulier peuvent être en même temps des tangentes singulières, de telle sorte que les points de la courbe réciproque K qui leur correspondent sont en même temps des points multiples de cette courbe. C'est donc par une étude approfondie des points correspondants de la courbe réciproque que l'on décidera combien des $t + w$ tangentes singulières de C sont absorbées par les points singuliers.



CHAPITRE II.

LES COURBES DE TROISIÈME ORDRE OU DE TROISIÈME CLASSE.

I. — Le système des points d'inflexion.

Nous entreprenons à présent d'appliquer spécialement aux courbes du *troisième* ordre les théorèmes et les idées générales qui précèdent ([1]), et dans cette étude nous considérerons les points suivants :

1° La relation de ces courbes avec la théorie des polaires et avec les formules de Plücker, et surtout la situation des neuf points d'inflexion; notre intérêt principal se concentrera sur la théorie de ces derniers, qui se présentent pour la première fois dans les courbes du troisième ordre;

2° L'exposition de leurs propriétés au moyen de la théorie des formes cubiques ternaires;

3° La géométrie sur une courbe du troisième ordre : pour cet objet, les applications de la théorie des fonctions elliptiques nous feront connaître des moyens auxiliaires entièrement nouveaux;

([1]) Pour le développement de la théorie de ces courbes, les travaux les plus importants sont les suivants : NEWTON, *Enumeratio linearum tertii ordinis;* MACLAURIN, *De linearum geometricarum proprietatibus generalibus tractatus* (traduit en français par DE JONQUIÈRES, *Mélanges de Géométrie pure,* p. 197, Paris, 1856); PLÜCKER, *System der analytischen Geometrie;* HESSE, *Journal de Crelle,* t. 28, 36 et 38; CAYLEY, *Philosophical Transactions,* t. 147, ainsi que les Ouvrages plusieurs fois cités de Salmon, Cremona et Chasles (*Géométrie supérieure*). Une exposition d'ensemble des théories géométriques a été aussi donnée par Durège : *Die ebenen Curven dritter Ordnung,* Leipzig, 1871. Nous renvoyons à ce dernier Ouvrage pour les développements plus étendus sur certains points particuliers de la théorie; on y trouve aussi des indications bibliographiques plus détaillées.

4° Les courbes du troisième ordre à points multiples et les dégénérations de ces courbes.

Nous nous demanderons d'abord comment on peut en général considérer une courbe du troisième ordre; aurons-nous, en nous basant sur la forme extérieure, à distinguer plusieurs types projectifs différents, ou bien, comme dans les coniques, une courbe réelle quelconque peut-elle être changée par collinéation réelle (ou par déformation continue) en une autre courbe réelle quelconque? Il est à peine nécessaire de faire remarquer que pour ces considérations de forme tous les coefficients de l'équation de la courbe doivent être supposés réels. Une courbe entièrement imaginaire ne peut posséder au plus que neuf points réels, à savoir les points d'intersection des courbes réelles $f = 0$ et $\varphi = 0$, dans le cas où la courbe imaginaire est représentable sous la forme

$$f + \sqrt{-1}\,\varphi = 0,$$

en supposant que ces points d'intersection soient réels. D'ailleurs, aucune hypothèse sur la réalité des coefficients n'est nécessaire pour les recherches algébriques ultérieures.

Une courbe réelle du troisième ordre est toujours rencontrée par une droite en trois points réels ou en deux points conjugués imaginairement et un point réel, et dans le plan il existe toujours des droites des *deux* espèces. Si, en effet, l'on part d'une droite à trois points d'intersection réels, et qu'on la fasse tourner autour d'un quelconque de ses points, elle arrivera insensiblement, d'après la loi de continuité, à une position où les deux intersections coïncideront. Si l'on continue la rotation au delà de cette position limite, les deux points deviendront nécessairement imaginaires, car autrement le point de contact de la position limite serait un point double de la courbe C_3; or, nous excluons provisoirement l'existence d'un point semblable. Ainsi on sera en fait conduit à une droite ayant un seul point d'intersection réel, et en partant de cette dernière on peut employer le même procédé en sens inverse. En particulier aussi la droite de l'infini rencontrera la courbe en un ou trois points réels; si donc nous désignons sous le nom d'*asymptote* la tangente à une courbe en l'un de ses points à l'infini, nous avons ce théorème :

Toute courbe réelle du troisième ordre a au moins *une asym-*

ptote réelle et peut toujours être projetée suivant une courbe qui n'a qu'une seule asymptote réelle.

Pour notre but immédiat nous avons encore à démontrer la proposition suivante :

Toute courbe réelle du troisième ordre a trois points d'inflexion réels.

Plus tard seulement nous montrerons qu'il ne peut pas y avoir un plus grand nombre de ces points qui soient réels.

En effet, ainsi qu'il a été démontré, nous pouvons toujours prendre la courbe de telle manière qu'elle ne possède qu'une branche s'étendant à l'infini, et cette branche doit nécessairement parcourir d'un trait continu l'espace compris entre les deux points A et B (*fig.* 23), où elle commence à s'approcher de l'asymptote.

Fig. 23.



Or, on peut admettre que les points A et B sont situés d'un côté différent de l'asymptote, comme dans l'hyperbole, car dans le cas contraire le point à l'infini sur l'asymptote serait un point d'inflexion, ce qu'on évitera par une transformation linéaire convenable. Sur les deux côtés la courbe s'éloigne d'abord de cette ligne; si donc les deux parties doivent se rapprocher pour former un trait suivi, elles doivent nécessairement changer leurs courbures, c'est-à-dire former quelque part, en W_1 et W_2 par exemple, deux points d'inflexion. Or, par là prennent naissance deux parties de la branche ayant une courbure de sens inverse, et leur réunion n'est possible qu'en un troisième point d'inflexion tel que W_3. Notre théorème est donc démontré.

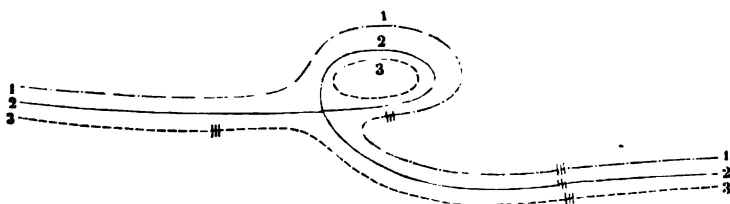
La branche de courbe décrite ici est coupée par *toute* droite réelle du plan en un point réel unique ; la courbe ne peut donc plus comprendre qu'une branche qui soit rencontrée par une droite en deux points réels au plus, c'est-à-dire un ovale. Mais cette partie peut manquer aussi entièrement. Nous obtenons ainsi les deux types suivants pour les formes possibles d'une courbe du troisième ordre :

1° *Courbe unipartite,* se composant d'une branche unique à trois points d'inflexion (1 dans la *fig.* 24) ;

2° *Courbe bipartite,* se composant d'une branche semblable et d'un ovale situé en dehors de cette première partie (3 dans la *fig.* 24).

On peut envisager comme courbe de passage entre les deux espèces la courbe à point double (2 dans la *fig.* 24).

Fig. 24.



Suivant la manière dont on se la figurera dériver d'une courbe générale du troisième ordre, on sera conduit à une courbe unipartite ou bipartite, comme la *fig.* 24 le fait suffisamment apercevoir. Par ce procédé de passage se trouve en même temps donnée la démonstration, non encore fournie dans ce qui précède, de l'existence des deux types présentés (¹).

(¹) Des raisonnements semblables sont au surplus vrais à l'égard des courbes d'ordre quelconque. Une courbe se compose de différentes branches ayant un parcours séparé, que l'on devra, d'après von Staudt (*Geometrie der Lage*, Nürnberg, 1847, p. 81), diviser en *paires* et *impaires*. Une branche impaire peut, comme la branche à trois points d'inflexion dans la courbe C_3, être engendrée par déformation d'une droite, une branche paire au contraire par déformation d'une conique. Deux branches impaires se coupent toujours ; par conséquent, une courbe sans point double ne peut renfermer qu'une seule branche de cette espèce *au plus*. Une courbe d'ordre impair sans point double en comprendra *toujours* une ; une courbe générale d'ordre pair se compose uniquement de branches paires. *Voir* aussi Klein, *Math. Annalen*, t. VI, p. 577, et Zeuthen, *ibid.*, t. VII, p. 410.

La forme d'une courbe du troisième ordre peut d'ailleurs différer beaucoup en apparence de celles représentées dans la *fig.* 24, si l'ovale est divisé en deux parties par la droite de l'infini, si l'un des points d'inflexion s'éloigne à l'infini, etc. ; et l'on obtient ainsi, suivant ces diverses dispositions par rapport à la droite de l'infini, les différentes variétés de courbes du troisième ordre, telles qu'elles sont indiquées dans les classifications de Newton, Cramer, Plücker, Möbius et Cayley ([1]). Notre classification fondamentale en courbes unipartites ou bipartites ne signifie pas, d'ailleurs, que toutes les courbes d'une classe puissent être transformées les unes dans les autres par collinéation. Cette transformation n'est au contraire pas possible; car une courbe du troisième ordre a, comme nous le verrons plus tard, un invariant absolu, et cet invariant doit avoir la même valeur pour deux courbes si elles sont transformables linéairement l'une dans l'autre ([2]).

Nous résumerons d'abord brièvement dans ce qui suit une série de théorèmes qui résultent immédiatement des développements généraux donnés précédemment, en particularisant seulement les nombres qui y figurent, ce qui nous conduira immédiatement à des propositions importantes sur la situation des points d'inflexion.

La courbe du troisième ordre ($f \equiv a_x^3 = 0$) est en général de la sixième classe (t. I, p. 347 et t. II, p. 66); autrement dit, on peut d'un point quelconque y lui mener six tangentes. Les six points de contact de ces dernières sont situés sur la conique $a_x^2 a_y = 0$ qui est la première polaire de y (p. 7). Toutes les premières polaires forment un réseau de coniques; parmi elles il s'en trouve un nombre infini

---

([1]) *Voir* sur ce sujet Salmon, *Higher plane Curves.*

([2]) La courbe C_3 a, en effet, deux invariants S et T, tels que S^3 divisé par T^2 est l'invariant absolu (*voir* plus bas). La condition d'existence d'un point double est alors $S^3 - 6T^2 = 0$; à la distinction de deux types de C_3 correspond la séparation des cas dans lesquels la valeur de $S^3 - 6T^2$ est $>$ ou <0, ainsi qu'il résulte de la considération des quatre tangentes issues d'un point de la branche impaire, si l'on fait usage des théorèmes sur la réalité des racines d'une équation du quatrième degré (Clebsch, *Theorie der binären Formen*, p. 160 et 468). *Voir* la fin de la 5e Section de ce Chapitre.

Pour les courbes d'ordre supérieur, on a ce théorème :

Une courbe de genre p ne peut avoir plus de p + 1 branches, et dans un ordre donné n, (n — 1)(n — 2) étant égal ou supérieur à p, il existe toujours des courbes ayant cette valeur maxima. Voir Harnack, *Math. Annalen*, t. X, p. 189.

ayant un point double, c'est-à-dire se décomposant en un couple de droites. Le lieu des pôles relatifs à ces coniques est une courbe du troisième ordre (formée en égalant à zéro le déterminant des secondes dérivées), la hessienne (p. 11)

$$(abc)^2 a_y b_y c_y = 0,$$

qui coupe la courbe primitive aux neuf points d'inflexion. Son équation s'obtient en éliminant les quantités x entre les trois équations

$$\sum_k f_{ik} y_k = a_i a_x a_y = 0,$$

où l'on a $f_{ik} = \frac{1}{6} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$ et où les quantités x_i sont les coordonnées du point double répondant à y. Or ces équations ne varient pas si l'on permute les x_i et les y_i, et de là résulte ce théorème :

La hessienne et la steinérienne d'une courbe du troisième ordre sont identiques.

On déduit encore de là cette proposition :

La polaire linéaire d'un point y de la hessienne touche cette courbe au point double de la première polaire de y.

Nous insisterons, mais plus tard seulement, sur les propriétés de la cayleyenne ou courbe enveloppée par les lignes $\overline{xy}$.

Nous pouvons facilement aussi donner l'équation du produit des six tangentes issues de y. Si, en effet, x est un point d'une telle tangente, l'équation

$$f(x+\lambda y) \equiv f + 3\lambda Df + 3\lambda^2 D^2 f + \lambda^3 D^3 f = 0,$$

dans laquelle $f = a_x^3$, $Df = a_x^2 a_y$, $D^2 f = a_x a_y^2$, $D^3 f = a_y^3$, doit donner pour λ deux racines égales ; autrement dit, son discriminant doit s'annuler. *Le produit des six tangentes issues d'un point y est donc donné* (t. I, p. 272) *par*

$$(1)\quad 4[fD^2 f - (Df)^2][DfD^3 f - (D^2 f)^2] - [fD^3 f - DfD^2 f]^2 = 0.$$

Si le pôle y devient un point de la courbe, deux des tangentes qui en sont issues se confondent avec la tangente de ce point, et la courbe primitive y sera touchée par sa polaire. En effet, l'équa-

tion (1) devient divisible dans le cas de $D^3 f = o$ par le facteur $(D^2 f)^2$; *d'un point de la courbe on peut donc mener à celle-ci encore quatre tangentes données par*

$$(2) \qquad 4 f D^2 f - 3 (D f)^2 = o.$$

Lorsque y a cette situation, les points de la première polaire se définiront géométriquement d'une manière aussi simple que dans les coniques. Soit z le second point d'intersection d'un rayon issu de y avec la polaire, de telle sorte que $a_y a_z^2 = o$. Si l'on cherche les points de rencontre $y + \lambda z$ du rayon avec la courbe primitive, on obtient $3 a_y^2 a_z + \lambda^2 a_z^3 = o$, c'est-à-dire une équation du second degré seulement relativement à λ, d'où ce qui suit:

Si l'on cherche sur les rayons menés par un point y de la courbe le point quatrième harmonique à y et aux deux autres points d'intersection, ce point décrit la première polaire de y. Cela résulte immédiatement aussi de nos théorèmes généraux précédents sur les systèmes polaires dans les formes binaires (t. I, p. 253).

Si enfin le pôle y est un des neuf points d'inflexion, y étant alors situé en même temps sur la hessienne, la polaire se décompose en deux droites, savoir: la tangente d'inflexion (puisque la polaire est tangente à la courbe) [1], et une autre droite répondant au point d'inflexion, *la droite harmonique. D'un point d'inflexion on ne peut donc plus mener que trois tangentes à la courbe;* leurs points de contact sont les trois points où la droite harmonique dont il a été parlé rencontre la courbe. D'après le théorème précédent, *la droite harmonique elle-même est d'ailleurs le lieu du point quatrième harmonique au point d'inflexion et aux deux autres points d'intersection des rayons issus de ce dernier avec la courbe.*

Pour discuter maintenant de plus près la situation respective des points d'inflexion, attachons-nous à notre théorème fondamental sur les systèmes de points d'intersection, lequel énonce, relative-

---

(1) Ce contact ne peut pas, en fait, être un contact improprement dit, c'est-à-dire provenir, par exemple, de ce que le point double de la polaire décomposée serait situé au point d'inflexion; car, autrement, on pourrait encore mener du point d'inflexion quatre tangentes à la courbe C_3, tandis que l'une d'elles doit évidemment être située infiniment près de la tangente d'inflexion.

ment aux courbes de troisième ordre, que toutes les courbes de cette espèce ayant huit points communs passent encore par un neuvième point déterminé (p. 133). C'est ce théorème qui nous a déjà fourni une démonstration simple du théorème de Pascal. Nous en ferons ici une autre application. Sur la courbe considérée prenons trois points A_1, A_2, A_3 situés sur la droite a, et également trois points B_1, B_2, B_3 sur une seconde droite b; traçons ensuite trois autres lignes joignant un point A avec un point B, par exemple les lignes $\overline{A_1 B_1}$, $\overline{A_2 B_2}$, $\overline{A_3 B_3}$. Ces lignes pourront être désignées respectivement par d_1, d_2, d_3 et couperont encore notre courbe respectivement aux points C_1, C_2, C_3. Nous disons que ces trois points C sont situés de même sur une droite c. Nous avons en effet trois courbes du troisième ordre :

1° La courbe donnée,

2° Les lignes d_1, d_2, d_3,

3° Les lignes a, b, c,

qui ont huit points communs, à savoir A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, et par conséquent renferment toutes aussi le neuvième point C_3, ce qu'il fallait démontrer.

Si donc on joint divisément chacun des trois points d'intersection d'une droite avec une courbe du troisième ordre à chacun des points d'intersection d'une autre droite, ces lignes de jonction coupent encore la courbe en trois points situés en ligne droite.

On peut de cette manière construire une infinité de canevas de six droites, dont neuf sommets sont toujours situés sur une courbe du troisième ordre. Par un choix particulier de ces systèmes, nous serons ramenés aux points d'inflexion. Rapprochons d'abord les droites a et b infiniment l'une de l'autre, de sorte qu'un point A_i et un point B_i deviennent infiniment voisins. Alors les lignes d_1, d_2, d_3 sont les tangentes de la courbe aux points A_1, A_2, A_3, et nous avons ce théorème :

Si les points de contact de trois tangentes à une courbe du troisième ordre sont en ligne droite, leurs trois autres points d'intersection sont de même en ligne droite.

Si ensuite les deux droites voisines a et b passent par deux

points d'inflexion, que conséquemment A_1 ($= B_1$) et A_2 ($= B_2$) soient deux points d'inflexion de la courbe, les lignes d_1, d_2 sont leurs tangentes d'inflexion. Mais alors les points d'intersection restants C_1, C_2 de ces dernières coïncident respectivement avec A_1, A_2; autrement dit, la ligne c se confond avec la ligne a. Actuellement, comme les points A_3, B_3, C_3 doivent aussi être situés en ligne droite, et qu'ici ils sont devenus infiniment voisins, ils forment aussi un point d'inflexion de notre courbe. Donc :

Une ligne droite qui joint deux points d'inflexion passe toujours en outre par un troisième point d'inflexion (¹).

Les points d'inflexion ont, par suite, une situation particulière les uns relativement aux autres. Par chacun d'eux passent quatre lignes de points d'inflexion ou *lignes inflexionnelles* dont chacune renferme deux des autres points d'inflexion. Il existera donc $\frac{1}{2} 9 . 4 = 12$ lignes de cette espèce, puisque dans l'arrangement actuel chaque ligne entre trois fois. Nous désignerons dans ce qui suit les points d'inflexion par les nombres

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$$

et la ligne inflexionnelle renfermant les points d'inflexion i, k, h par L_{ikh}. Ainsi, par exemple, 1, 2, 3 seront les trois points d'inflexion situés sur la ligne L_{123}. Par chacun d'eux passent encore trois lignes inflexionnelles, en outre de L_{123}, de sorte que nous avons dix lignes en tout. Il existe donc encore deux autres lignes inflexionnelles qui ne renferment pas les points 1, 2, 3. Si nous admettons que 4, 5, 6 soient situés sur une droite L_{456}, il y aura une douzième droite L_{789} renfermant les points 7, 8, 9. Une telle combinaison de trois droites qui renferment ensemble la totalité des neuf points d'inflexion est appelée un *triangle inflexionnel*. Le nombre de ces triangles se détermine comme il suit. Par chaque point d'inflexion passent quatre lignes inflexionnelles; chacune doit être le côté d'un triangle et d'un triangle unique. Mais, comme le point d'inflexion considéré doit entrer dans chaque triangle, il

(¹) *Voir* Maclaurin (*loc. cit.*). Nous ferons plus loin connaître une démonstration purement algébrique de ce théorème.

y aura, d'une manière générale, seulement quatre triangles inflexionnels. Nous pouvons par suite énoncer ce théorème :

Les neuf points d'inflexion sont situés trois à trois sur douze droites, et ces droites se rangent trois à trois en quatre groupes (triangles inflexionnels), de telle sorte que chaque groupe composé de trois lignes renferme l'ensemble des neuf points d'inflexion.

Dans l'étude purement algébrique du problème des points d'inflexion telle que nous l'entreprendrons plus tard, ce théorème forme le cœur du sujet; nous ne ferons qu'esquisser brièvement ici la marche des idées à suivre. Du groupement précité des neuf points, il résulte que l'équation du neuvième degré qui les détermine présente un caractère tout spécial, à savoir la résolubilité par radicaux. Elle doit d'abord conduire à une équation du quatrième degré de laquelle dépendent les quatre triangles inflexionnels : décomposer alors deux de ces derniers chacun en leurs trois côtés exige seulement une équation du troisième degré; les points d'intersection des côtés particuliers des divers triangles sont les points d'inflexion. Pour déterminer ces derniers, on aura donc à résoudre, d'après cette supputation provisoire, en dehors d'équations linéaires, seulement une équation du quatrième degré et deux du troisième. Pour établir l'équation du quatrième degré, on a encore besoin des développements géométriques qui suivent.

La courbe donnée $f = 0$ et sa hessienne $\Delta = 0$ déterminent le faisceau $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$, dont les points de base sont les neuf points d'inflexion. Parmi les courbes de ce faisceau sont nécessairement compris les quatre triangles inflexionnels, car chacun d'eux forme une courbe évanouissante du troisième ordre qui passe par les neuf points d'inflexion. Nous avons donc à former relativement à $\frac{\varkappa}{\lambda}$ une équation du quatrième degré qui détermine ces quatre courbes spéciales du faisceau $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$. Or, par un point d'inflexion passent quatre rayons qui comprennent chacun deux autres points d'inflexion. Nous pouvons utiliser deux de ces lignes pour construire la droite harmonique du point d'inflexion, en cherchant sur elles de la manière indiquée le point quatrième harmonique; la ligne qui joint ces derniers est la droite harmonique cherchée. Cette construction dépend uniquement des points

d'inflexion, et non de la courbe donnée C_3 ; si donc une courbe C_3 passe par les neuf points d'inflexion, les points quatrièmes harmoniques appartenant à l'un d'eux relativement à cette courbe sont situés sur une droite; autrement dit, la polaire du point se décompose. Mais il n'en est ainsi que pour les points d'inflexion, et nous avons en conséquence cet important théorème :

Si les neuf points de base d'un faisceau de courbes du troisième ordre sont des points d'inflexion pour l'une d'elles, ils le seront pour toutes les courbes du faisceau (¹), ou :

Toutes les courbes du faisceau $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$ *ont les neuf mêmes points d'inflexion.*

Les tangentes d'inflexion sont naturellement différentes.

Il résulte en particulier de là que la hessienne de $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$ est encore une courbe du faisceau. Si donc nous désignons son équation par $\Delta_{\varkappa\lambda} = 0$, nous aurons

$$(3) \qquad \Delta_{\varkappa\lambda} = K f + L\Delta,$$

K et L étant du troisième degré en $\varkappa$, λ, parce que la forme hessienne est toujours du troisième degré par rapport aux coefficients de la forme primitive. La détermination effective de ces fonctions K, L se fait à l'aide de la théorie des formes cubiques ternaires, sur laquelle nous insisterons plus tard.

Parmi les courbes du faisceau *syzygétique* $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$ sont compris, ainsi qu'il a été dit précédemment, les quatre triangles inflexionnels. Nous pouvons les caractériser par cette circonstance que leur hessienne doit coïncider avec la courbe primitive; car sur une courbe composée de trois droites tout point est un point d'inflexion, puisqu'il s'y trouve toujours trois points successifs en ligne droite. Si donc la courbe $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$ doit se décomposer en trois droites, l'une des équations

$$\varkappa f + \lambda\Delta = 0, \quad K f + L\Delta = 0$$

sera nécessairement une suite de l'autre. En éliminant les x, on obtient donc pour l'équation du quatrième degré qui détermine

(¹) *Voir* ici et pour ce qui suit HESSE (*loc. cit.*).

les triangles inflexionnels

(4) $$\varkappa L - \lambda K = 0 \quad (^1).$$

De la distribution des points d'inflexion sur les côtés des quatre triangles, nous pouvons d'ailleurs tirer des conclusions sur leur réalité. A cet effet, nous résumerons dans un Tableau la situation des neuf points sur les douze côtés. Nous ferons pour cela usage du théorème que voici :

Si, par un point d'inflexion tel que 1, *passent deux lignes inflexionnelles telles que* L_{123} *et* L_{147}, *les lignes qui joignent* 2, 3 *à chacun des points* 4, 7 *ne se coupent jamais en un point d'inflexion.*

Car si $\overline{24}$ et $\overline{37}$ se coupaient en 6, et que 5 par exemple fût le troisième point compris dans $\overline{16}$, il faudrait que 8, 9 (comme étant les seuls points qui restent) fussent en ligne droite avec 1 aussi bien qu'avec 6, ce qui n'est pas possible. En conséquence, nous établirons immédiatement le Tableau suivant des groupes ternaires situés sur les douze lignes inflexionnelles et formés avec les neuf points :

(5)	(1) 1, 2, 3	(2) 1, 4, 7	(3) 1, 5, 9	(4) 1, 6, 8
	(5) 4, 5, 6	(6) 2, 5, 8	(7) 2, 6, 7	(8) 2, 4, 9
	(9) 7, 8, 9	(10) 3, 6, 9	(11) 3, 4, 8	(12) 3, 5, 7

Nous pouvons, en effet, choisir arbitrairement (1), (2), (3), (4), parce que par 1 passent dans tous les cas quatre lignes inflexionnelles. Nous pouvons ensuite, ainsi qu'il a été montré précédemment, admettre que 4, 5, 6 et 7, 8, 9 sont situés chacun sur une droite, ce qui fixera (5) et (9). Nous pouvons encore joindre le point 2 avec 4, 5 et 6, et, comme les nombres 24, 25, 26 n'entrent pas encore ensemble dans (1), (2), (3), (4), (5), (9), et qu'au contraire 4 se trouve déjà avec 7 dans (2), 5 avec 9 dans (3), 6 avec 8 dans (4), nous n'avons plus le choix, pour chacun des trois couples 24, 25, 26, qu'entre deux des nombres 7, 8, 9, les autres nombres ne pouvant pas leur être adjoints d'après le théorème précédent. Enfin, on reconnaît également que, d'après ces déter-

(1) Cette équation sera étudiée plus en détail ci-après, dans la théorie des formes cubiques ternaires.

minations, les trois lignes issues de 3 ne peuvent plus comprendre que les points qui figurent dans (10), (11), (12). Dans le Tableau ainsi formé, chaque réunion de trois groupes superposés forme un triangle inflexionnel; car dans chacune entre une fois, et seulement une fois, chacun des nombres 1, 2, ..., 9. Nous pouvons représenter plus sommairement encore la loi de ce groupement, ainsi qu'il suit. Écrivons les neuf nombres sous la forme de déterminant :

$$(6)\qquad \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{Bmatrix}$$

Désignons maintenant les triangles dans l'ordre où ils se présentent dans le Tableau (5) ci-dessus par I, II, III, IV, de sorte que III par exemple se compose des lignes L_{159}, L_{267}, L_{348}. On reconnaît immédiatement l'exactitude de la règle suivante.

Sont toujours en ligne droite :

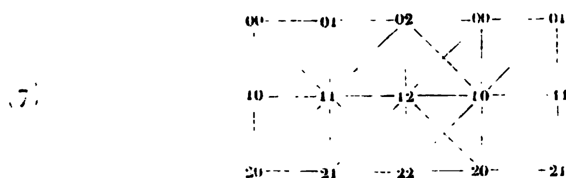
Dans I, trois points d'une ligne horizontale de (6);
Dans II, trois points d'une ligne verticale de (6);
Dans III, trois points qui, dans (6) considéré comme déterminant, donnent un terme positif;
Dans IV, trois points qui, dans la même hypothèse, donnent un terme négatif.

Mais le groupement dont il s'agit prend une forme beaucoup plus simple encore si l'on désigne chaque point d'inflexion par deux nombres (comme un élément d'un déterminant), et qu'on écrive par suite 00 au lieu de 1, 01 au lieu de 2, etc. Nous avons alors les neuf points d'inflexion

$$\begin{matrix} 00 & 01 & 02 \\ 10 & 11 & 12 \\ 20 & 21 & 22 \end{matrix}$$

et la règle simple : *Sont en ligne droite, à l'exclusion des autres, les points pour lesquels la somme des premiers nombres, aussi bien que la somme des seconds, est divisible par* 3. Cette représentation ne paraît ici présenter d'avantage qu'au point de vue de la forme : néanmoins, plus tard, à l'aide de la théorie des fonctions elliptiques.

nous serons en situation d'assigner aux couples numériques 00, 01 une signification réelle, circonstance qui nous conduira directement au théorème énoncé en dernier lieu. Nous nous servirons d'autant plus de cette manière d'écrire par la suite. Si nous désignons maintenant par des traits d'union les lignes inflexionnelles en affectant des traits parallèles aux lignes qui forment un triangle, nous avons le Tableau (*voir*. t. I, p. 20)



autrement dit, on a les lignes et les triangles suivants :

I.	II.	III.	IV.
00, 01, 02	00, 10, 20	00, 11, 22	00, 12, 21
10, 11, 12	01, 11, 21	01, 12, 20	01, 10, 22
20, 21, 22	02, 12, 22	02, 10, 21	02, 11, 20

ce qu'on peut exprimer en disant que dans I trois points dont le premier indice est constant sont en ligne droite, que dans II les points en ligne droite sont ceux dont le deuxième indice est constant, que dans III ce sont ceux dont les deux indices croissent d'une unité en passant d'un point à un autre, que dans IV ce sont ceux dont l'un des indices diminue d'une unité dans le passage, tandis que l'autre indice croît d'une unité.

Prenons un des triangles ainsi obtenus, le premier par exemple, pour base des considérations suivantes, et désignons-en les sommets par A_0, A_1, A_2 et les côtés opposés respectifs par a_0, a_1, a_2, de telle sorte que sur a_i soient situés les points $i0$, $i1$, $i2$. Si nous considérons, par exemple, les deux séries de points

$$\begin{array}{llllll} (a_2) & A_0, & 20, & 21, & 22, & A_1, \\ (a_1) & A_0, & 10, & 12, & 11, & A_2, \end{array}$$

il résulte de ce qui précède qu'elles sont placées perspectivement, car deux points l'un au-dessous de l'autre sont en ligne droite

avec oo. Mais au lieu de oo nous pouvons choisir aussi 01 ou 02 comme centre de projection, à la seule condition d'ordonner la série a_1 ainsi qu'il suit :

$$(a'_1)\quad A_0 \quad 12, \quad 11, \quad 10, \quad A_2$$
$$(a''_1)\quad A_0 \quad 11, \quad 10, \quad 12, \quad A_2.$$

Les trois séries de points a_1, a'_1, a''_1 sont projectives entre elles, puisqu'elles sont toutes perspectives à a_2; mais elles ne se distinguent que par permutation circulaire des éléments 10, 11, 12, et sont en conséquence cyclo-projectives (t. I, p. 250). La même chose a lieu pour les autres triangles et les autres lignes, de sorte que nous pouvons énoncer ce théorème :

Si l'on considère les trois points d'inflexion situés sur une ligne inflexionnelle comme un système cyclo-projectif, les deux éléments fondamentaux fixes seront donnés par les sommets du triangle inflexionnel correspondant qui sont situés sur cette ligne, et l'on peut de trente-six manières choisir deux séries de points telles qu'elles soient placées perspectivement et que leur centre de projection soit encore un point d'inflexion ([1]),

ou, en d'autres termes (*voir* t. I, p. 280) :

Si l'on considère les trois points d'inflexion situés sur une droite comme points-racines d'une forme cubique binaire, les points de la forme hessienne de cette dernière seront représentés par les sommets du triangle inflexionnel dont la droite fait partie.

Chaque sommet de cette espèce forme donc avec les trois points un rapport équianharmonique.

Il résulte déjà de là que les deux sommets sont nécessairement conjugués imaginairement, si les trois points d'inflexion sont réels; car quatre points à rapport équianharmonique ne peuvent jamais être réels tous ensemble. Si, au contraire, les deux sommets doivent être réels, il faut que deux des trois points d'inflexion soient

---

([1]) On déduit facilement de ces relations que toute courbe du troisième ordre admet dix-huit *transformations linéaires* en elle-même, et ces transformations changent en elles-mêmes simultanément toutes les courbes du faisceau $\varkappa f + \lambda \Delta$. *Voir* sur ce sujet KLEIN : *Math. Annalen*, t. IV, p. 353; HARNACK, *ibid.*, t. IX, p. 42.

imaginaires conjugués. On reconnaît aussi que, dans notre cas, les neuf points d'inflexion ne peuvent pas être tous réels par ce fait que deux séries de points situées perspectivement comme a_1 et a_2 ne peuvent donner qu'un seul centre de projection réel. Si l'on serre la question de plus près, la distribution des points réels et des points imaginaires se présente de la manière suivante.

Nous avons déjà vu précédemment qu'il existe toujours nécessairement *trois points d'inflexion réels*. Ces trois points sont situés en ligne droite; car la ligne réelle qui joint deux d'entre eux rencontrera la courbe en un troisième point *réel;* or ce point est, d'après un théorème précédent, un point d'inflexion. Les deux sommets de triangle situés sur cette ligne de points d'inflexion sont alors nécessairement imaginaires conjugués, et il en est de même des deux lignes passant par ces sommets, qui forment avec la droite réelle un triangle inflexionnel. Par suite, tous les autres points d'inflexion sont imaginaires, et dans le triangle considéré les points d'inflexion de l'un des côtés sont conjugués à ceux de l'autre. Si l'on joint maintenant deux à deux les points conjugués, on obtient un second triangle dont les côtés sont tous réels, et dans lequel, sur chaque côté, est situé un point d'inflexion réel. Les deux autres triangles sont complètement imaginaires et conjugués l'un par rapport à l'autre, car autrement il y aurait plus de trois points d'inflexion réels, ce qui n'est pas possible. *Donc sont toujours réels : trois points d'inflexion, quatre lignes de points d'inflexion, un triangle inflexionnel, quatre sommets de triangles inflexionnels* ([1]). Ces derniers sont les trois sommets du triangle réel et le sommet opposé à la ligne joignant les trois points d'inflexion réels, dans le triangle dont cette ligne fait partie.

Ces relations peuvent se représenter algébriquement d'une manière simple si l'on introduit l'un des triangles inflexionnels, le triangle réel par exemple, comme triangle de coordonnées, c'est-à-dire si l'on se sert *d'une forme canonique* (possible en fait à établir) *pour l'équation de la courbe du troisième ordre.*

([1]) Les théorèmes sur ce groupement et la réalité des points d'inflexion ont été développés pour la première fois par PLÜCKER, *System der analytischen Geometrie.* Berlin, 1835, p. 285 et suiv.

Tandis qu'une pareille forme simplifiée d'équation était possible dans les coniques d'un nombre triplement infini de manières, il n'existe pour le même but dans les courbes du troisième ordre que quatre triangles de base différents. D'ailleurs, dans les courbes plus élevées, la simplification procurée par une forme canonique devient toujours relativement plus faible ; car une transformation linéaire renferme huit constantes que l'on peut déterminer de manière à faire disparaître huit constantes de la courbe, en sorte qu'il n'entre plus que $\frac{1}{2}n(n+3)-8$ constantes dans la forme canonique. Mais ce nombre est déjà égal à 6 pour $n=4$; la simplification obtenue n'est donc déjà guère importante. Dans les courbes du troisième ordre il y aura d'après cela possibilité d'avoir une forme canonique dans laquelle n'entre plus qu'une *constante absolue ;* et cette constante est en corrélation étroite avec l'unique invariant absolu de la courbe, que nous établirons plus tard. En fait, une forme canonique de l'espèce dont il s'agit s'obtient par les raisonnements qui suivent.

Si l'on représente par $y_1=0$, par exemple, une ligne inflexionnelle, on aura sur cette ligne une détermination binaire de coordonnées y_2, y_3 dont les points de base coïncident avec les sommets du triangle de coordonnées situés sur y_1. Actuellement ces sommets doivent (nous l'admettons ainsi) être les sommets d'un triangle inflexionnel ; et, par suite, d'après le théorème que nous venons de démontrer, représenter la forme hessienne de la forme cubique binaire qui est donnée par les trois points d'inflexion situés sur $y_1=0$. Mais l'équation de ces derniers sur le terrain binaire, rapportée aux points de base de la forme hessienne $y_2=0$, $y_3=0$, peut, d'après nos précédentes recherches, être supposée sous la forme $y_2^3+y_3^3=0$ (¹) ; et c'est en cette dernière équation que se transformera l'équation de la courbe pour $y_1=0$. De même les seuls termes de celle-ci qui, dans l'hypothèse successive de $y_2=0$ et $y_3=0$, ne disparaissent pas sont respectivement les expressions

$$y_1^3+y_3^3 \quad \text{et} \quad y_1^3+y_2^3.$$

(¹) La forme $y_2^3-y_3^3$ dont il est fait usage, t. I, p. 278, se change évidemment en celle-ci, à la condition d'écrire $-y_3$ au lieu de y_3.

L'équation de la courbe du troisième ordre, rapportée à un triangle inflexionnel, est donc de la forme

(8) $$f \equiv a(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3) + 6by_1y_2y_3 = 0,$$

$\frac{b}{a}$ étant une constante absolue, caractérisant la courbe, et dont nous apprendrons plus tard à connaître le sens géométrique. Non-seulement cette forme d'équation se présente *toujours* en cas de triangles inflexionnels, mais encore elle leur appartient *exclusivement;* car nous pouvons facilement montrer qu'une courbe dont (8) est l'équation a toujours ses points d'inflexion sur les côtés du triangle des coordonnées. Formons dans ce but l'équation de la hessienne; cette dernière est

$$\frac{1}{6}\Delta \equiv \begin{vmatrix} ay_1 & by_3 & by_2 \\ by_3 & ay_2 & by_1 \\ by_2 & by_1 & ay_3 \end{vmatrix}$$
$$\equiv (a^3 + 2b^3)y_1y_2y_3 - ab^2(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3) = 0,$$

ou, si nous posons $\alpha = -6ab^2$, $\beta = a^3 + 2b^3$,

(9) $$\Delta \equiv \alpha(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3) + 6\beta y_1y_2y_3 = 0,$$

c'est-à-dire de même forme que l'équation de la courbe. Pour les points d'intersection des courbes (8) et (9), nous avons donc ou bien

(10) $$a\beta - b\alpha = 0$$

ou

(11) $$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = 0 \quad \text{et} \quad y_1y_2y_3 = 0.$$

Mais cette dernière équation exprime immédiatement que les points d'intersection de (8) et de (9), c'est-à-dire les points d'inflexion, sont situés sur les côtés $y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0$.

L'équation (10) n'est pas satisfaite en général : elle donne d'ailleurs pour $a : b$ l'équation ($\varepsilon^3 = 1$)

$$0 = a^4 + 8ab^3 = a(a + 2b)(a + 2\varepsilon b)(a + 2\varepsilon^2 b).$$

Si l'un de ces quatre facteurs s'annule, la courbe est toujours un triangle; elle a, par suite, un nombre infini de points d'in-

flexion et n'est pas pour le moment l'objet de notre étude. En effet, pour $a = 0$, l'équation (8) donne directement $y_1 y_2 y_3 = 0$, et pour $a = -2\varepsilon^i b$ ou $b = -\frac{1}{2} a \varepsilon^{2i}$ elle devient

$$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 - 3\varepsilon^{2i} y_1 y_2 y_3$$
$$\equiv (y_1 + y_2 + y_3 \varepsilon^{2i})(y_1 + y_2 \varepsilon + y_3 \varepsilon^{2i+2})(y_1 + y_2 \varepsilon^2 + y_3 \varepsilon^{2i+1}) = 0.$$

f devient aussi proportionnel à Δ lorsque l'équation (10) est satisfaite, comme cela doit être (p. 237).

Avec le secours de la forme canonique précédente, nous démontrerons facilement le théorème de Hesse : que toutes les courbes du faisceau $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$ ont leurs points d'inflexion communs. La hessienne de la courbe

$$\varkappa f + \lambda\Delta \equiv (\varkappa a + \lambda\alpha)(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3) + 6(\varkappa b + \lambda\beta) y_1 y_2 y_3 = 0$$

est, en effet, donnée par

$$(12) \qquad \Delta_{\varkappa\lambda} \equiv A(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3) + 6B y_1 y_2 y_3 = 0$$

où A, B dépendent de $\varkappa a + \lambda\alpha$, $\varkappa b + \lambda\beta$ comme α, β dépendent de a, b, où par conséquent

$$A = -6(\varkappa a + \lambda\alpha)(\varkappa b + \lambda\beta)^2,$$
$$B = (\varkappa a + \lambda\alpha)^3 + 2(\varkappa b + \lambda\beta)^3;$$

et, puisque $y_1^3 + y_2^3 + y_3^3$ et $y_1 y_2 y_3$ peuvent s'exprimer en f et Δ, il en résulte de nouveau l'équation (3) : $\Delta_{\varkappa\lambda} = Kf + L\Delta$, ce qui implique le théorème de Hesse.

Les coordonnées des neuf points d'inflexion, ainsi que les équations des douze lignes inflexionnelles, peuvent facilement être données maintenant. En admettant que les lignes $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ soient réelles, nous avons pour $y_1 = 0$

$$y_2^3 + y_3^3 = 0,$$

et, par suite, si l'on pose $y_2 = 1$, $y_3 = -1, -\varepsilon$ ou $-\varepsilon^2$; *et l'on trouve ainsi pour les coordonnées des neuf points d'inflexion* la Table suivante ($\varepsilon^3 = 1$).

Sur $y_1 = 0 \ldots \quad 0, \quad 1, -1; \quad 0, \quad 1, -\varepsilon; \quad 0, \quad 1, -\varepsilon^2;$

$y_2 = 0 \ldots -\varepsilon^2, \quad 0, \quad 1; \quad -1, \quad 0, \quad 1; \quad -\varepsilon, \quad 0, \quad 1;$

$y_3 = 0 \ldots \quad 1, -\varepsilon, \quad 0; \quad 1, -\varepsilon^2, \quad 0; \quad 1, -1, \quad 0,$

qui dans cette disposition concorde entièrement avec le Tableau (7) ci-dessus. Trois réunions de points placés sous ou à côté les uns des autres donnent chacune un triangle, ainsi que trois réunions de points d'un terme-déterminant positif ou négatif déduit du Tableau. Il est facile de s'en convaincre directement, puisque le déterminant formé avec les coordonnées de trois points semblables s'annule, et que, par conséquent, ceux-ci sont en ligne droite. *Pour les produits des côtés des quatre triangles inflexionnels,* nous avons les équations

I. $$y_1 y_2 y_3 = 0,$$

II. $$(y_1 + y_2 + y_3)(y_1 + \varepsilon y_2 + \varepsilon^2 y_3)(y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon y_3) = 0,$$

III. $$(y_1 + \varepsilon y_2 + y_3)(y_1 + y_2 + \varepsilon y_3)(y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^2 y_3) = 0,$$

IV. $$(y_1 + \varepsilon^2 y_2 + y_3)(y_1 + y_2 + \varepsilon^2 y_3)(y_1 + \varepsilon y_2 + \varepsilon y_3) = 0.$$

Ici II se compose des termes-déterminants positifs de la Table et renferme un côté réel et deux côtés imaginaires conjugués; III se compose des lignes verticales et est totalement imaginaire; IV est composé de termes-déterminants négatifs, et est conjugué imaginairement à III, côté pour côté.

Ces relations se comportent naturellement d'une manière tout à fait analogue si l'on prend pour point de départ un des triangles imaginaires au lieu du triangle réel. On peut effectuer *le passage d'un triangle inflexionnel à un autre* de la manière suivante. L'équation de la courbe $f = 0$ rapportée au triangle I ($y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$) étant donnée sous la forme (8), nous poserons, pour la rapporter au triangle II par exemple,

$$z_1 = y_1 + y_2 + y_3,$$
$$z_2 = y_1 + \varepsilon y_2 + \varepsilon^2 y_3,$$
$$z_3 = y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon y_3,$$

et, pour abréger,

$$\varphi = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3, \quad \psi = y_1 y_2 y_3; \quad \varphi' = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3, \quad \psi' = z_1 z_2 z_3;$$

il vient alors

$$\varphi' = 3(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3) + 18 y_1 y_2 y_3 = 3\varphi + 18\psi,$$
$$\psi' = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + 3(\varepsilon + \varepsilon^2) y_1 y_2 y_3 = \varphi - 3\psi,$$

d'où

$$9\varphi = \varphi' + 6\psi', \quad 27\psi = \varphi' - 3\psi',$$

et pour l'équation cherchée de la courbe, rapportée au nouveau triangle,

$$9f \equiv 9a\varphi + 54b\psi \equiv (a + 2b)\varphi' + 6(a - b)\psi' = 0.$$

Pour la résolution effective du problème des points d'inflexion, il nous reste, après ces explications détaillées sur le groupement des neuf points, à établir les formules de transformation au moyen desquelles une courbe quelconque du troisième ordre peut être mise sous la forme canonique reconnue par nous comme possible, c'est-à-dire être rapportée à un triangle inflexionnel. La question de la détermination des points d'inflexion est donc ramenée à un problème de transformation, tout comme celle précédemment traitée de la recherche des points communs à deux coniques. L'équation du quatrième degré (4) remplace ici l'équation du troisième degré $\Delta(\lambda) = 0$ qui a servi pour ce dernier problème (t. I, p. 153 et suiv.)

II. — Les courbes annexes de troisième classe.

Nous revenons à la considération des neuf droites harmoniques qui répondent aux neuf points d'inflexion. On peut, ainsi qu'il a déjà été dit, construire une droite de cette espèce en cherchant, sur les lignes inflexionnelles qui passent par un même point, le point quatrième harmonique aux deux autres points d'inflexion de chacune. En vertu de nos recherches sur les formes cubiques binaires (t. I, p. 280), nous avons ce théorème :

Si l'on considère les trois points d'inflexion situés sur une droite comme points fondamentaux d'une forme cubique binaire, les points d'intersection des trois droites harmoniques corrélatives avec la ligne inflexionnelle forment les points fondamentaux du covariant Q. Et comme le covariant binaire quadratique Δ est

représenté par les sommets du triangle inflexionnel placés sur la ligne considérée (p. 237), il suit encore de là que :

Le point d'intersection de la droite harmonique corrélative à un point d'inflexion et d'une ligne inflexionnelle passant par ce point est le point quatrième harmonique aux deux sommets du triangle inflexionnel situés sur cette dernière droite et au point d'inflexion.

Il est facile, d'ailleurs, d'obtenir intuitivement et par voie directe cette proposition : *Les neuf droites harmoniques sont les mêmes pour toutes les coubes du faisceau* $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$. On les obtiendra donc comme parties des polaires des points d'inflexion relativement à toutes ces courbes, si l'on considère comme courbe primitive un triangle inflexionnel, et que l'on construise la polaire d'un point d'inflexion par rapport à ce triangle. Or, la polaire en question se compose du côté du triangle qui passe par le point d'inflexion, et de la polaire du point d'inflexion prise relativement aux deux autres côtés du même triangle. La droite harmonique s'obtiendra donc d'une manière simple, si l'on joint le point d'inflexion considéré au sommet opposé de l'un des quatre triangles inflexionnels sur lequel le point se trouve, et si l'on cherche le rayon quatrième harmonique à cette ligne et aux deux côtés du triangle qui convergent au sommet précité. Les droites harmoniques passent, d'après cela, chacune par un sommet de chaque triangle inflexionnel :

Les douze sommets des triangles inflexionnels sont situés quatre à quatre sur les neuf droites harmoniques. On conclut d'ailleurs immédiatement de la construction ce théorème :

Les droites harmoniques qui appartiennent à trois points d'inflexion situés sur une ligne inflexionnelle se coupent en un sommet du triangle qui se trouve par là correspondre à la ligne inflexionnelle dont il s'agit; aux côtés d'un triangle correspondent les sommets opposés.

Les droites harmoniques forment donc par leur groupement un système exactement réciproque, au point de vue dualistique, de celui des points d'inflexion; il en résulte qu'elles sont les tangentes de rebroussement communes à un faisceau tangentiel de troisième

classe, de même que les points d'inflexion étaient communs à toutes les courbes d'un faisceau de troisième ordre. La théorie des courbes du troisième ordre est donc inséparable de celle des courbes de la troisième classe; l'une conduit nécessairement à l'autre. Avant de passer au système précité de courbes à tangentes de rebroussement communes, nous nous proposons d'étendre dualistiquement aux courbes de la troisième classe les théorèmes obtenus relativement aux courbes du troisième ordre, en nous bornant à un court résumé.

En ce qui concerne d'abord la forme extérieure des premières, nous pouvons l'obtenir en construisant les figures polaires réciproques relativement à une conique quelconque des courbes représentées dans la *fig.* 24. Un ovale donne encore un ovale, de même qu'une conique se transforme en une conique; d'une portion à trois points d'inflexion en ligne droite résulte une portion à trois tangentes de rebroussement passant par un même point (1) et formant une branche fermée, car elle doit pouvoir être engendrée au moyen d'un faisceau de rayons par dégénération successive, de même que la portion à trois inflexions au moyen d'une droite. Nous avons, en conséquence, *les types suivants de courbes de la troisième classe :*

1° *Courbes unipartites,* consistant en une partie unique à trois tangentes de rebroussement (*fig.* 27 et 3, *fig.* 26);

2° *Courbes bipartites* se composant d'une portion de cette nature et d'un ovale qui l'entoure (*fig.* 25 et 1, *fig.* 26).

Dans ce dernier cas, l'ovale ne peut être situé à l'intérieur de la branche tricuspidale, car autrement il y aurait des points d'où l'on pourrait mener cinq tangentes à la courbe. Entre les deux espèces de courbes se place comme élément de transition (2) la courbe à tangente double (2, *fig.* 26). Le dessin montre clairement comment se forme de cette courbe la courbe bipartite de la *fig.* 25; d'un autre côté, la courbe de la *fig.* 27 dérive de la courbe 3 de la *fig.* 26 par déformation convenable et projection.

---

(1) On vérifie aussi la même chose en observant que la courbe de la troisième classe est du sixième ordre, et qu'une courbe d'ordre pair sans point double ne peut jamais renfermer de branche impaire. *Voir* la note, p. 223.

(2) *Voir* à ce sujet la *fig.* 19, p. 59.

Par translation dualistique nous obtenons, d'ailleurs, immédiatement les théorèmes suivants :

Une courbe de la troisième classe est, en général, du sixième ordre et a neuf tangentes de rebroussement. *La première polaire d'une droite v, relativement à la courbe $\varphi \equiv u_\alpha^3 = 0$, est une conique $u_\alpha^2 v_\alpha = 0$ qui touche les six tangentes menées à $\varphi = 0$ par*

Fig. 25.



Fig. 26.

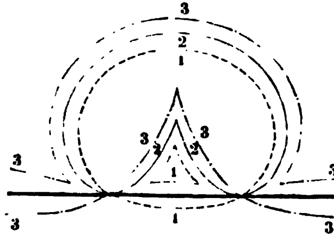
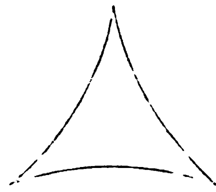


Fig. 27.



les points d'intersection de v avec cette courbe. Si, en particulier, v est une tangente de $\varphi = 0$, la conique touche elle-même la courbe du troisième ordre au point de contact. Elle se décompose en un couple de points si la droite v satisfait à la condition

$$\Delta_\varphi \equiv (\alpha\beta\gamma)^2 v_\alpha v_\beta v_\gamma = 0,$$

c'est-à-dire touche la hessienne de $\varphi = 0$, et cette dernière courbe est touchée simultanément par les droites qui joignent les deux points d'un couple de cette nature. La courbe dont il s'agit a les mêmes tangentes de rebroussement que $\varphi = 0$, et la même propriété appartient à toutes les courbes du système $\varkappa\varphi + \lambda\Delta_\varphi = 0$; toutefois leurs points de rebroussement sont différents. La polaire d'une tangente de rebroussement se décompose en deux points, dont l'un est le point de rebroussement lui-même, tandis que l'autre correspond dualistiquement à une droite harmonique, et conséquemment est le même pour toutes les courbes du système à tangentes de rebroussement communes.

Par tout point d'une tangente à une courbe de troisième classe on peut encore mener deux autres tangentes à cette courbe. Si l'on cherche la droite quatrième harmonique à ces deux tangentes et à la première, l'ensemble de ces droites enveloppera une conique qui sera la courbe polaire de la première tangente. Celle-ci

16.

se décompose, comme il a été observé, en un couple de points, dans le cas où la tangente est une tangente de rebroussement. Les neuf points des neuf couples ayant cette origine, qui ne coïncident pas avec les points de rebroussement, forment un système de points qui fournit en même temps les points de base pour un faisceau syzygétique de courbes du troisième ordre, et ainsi de suite.

Nous allons maintenant montrer que le système de courbes de troisième classe qui répond au faisceau $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$ n'est autre chose que l'ensemble des cayleyennes de ce faisceau, et que, par conséquent, la cayleyenne de $f = 0$ s'y trouve elle-même comprise. Cette courbe devrait, conformément à nos formules générales, être de la classe 6 (p. 87); mais comme, dans les courbes du troisième ordre, la hessienne et la steinérienne se confondent, toute tangente comme ligne de jonction des points correspondants des deux courbes compte double. *La cayleyenne est donc de la troisième classe.*

Cette courbe est en même temps enveloppée par les couples de lignes en lesquels peuvent se décomposer les premières polaires. Considérons, en effet, deux points x et y de la hessienne qui soient *conjugués*, c'est-à-dire tels que la première polaire de x ait un point double en y, et que la première polaire de y ait un point double en x. Les deux couples de lignes qui prennent ainsi naissance se coupent en quatre points, et toutes les coniques qui passent par ces points ont leur pôle sur la ligne $\overline{xy}$. Parmi ces dernières coniques figure encore un troisième couple de lignes dont le point double z doit être situé de même sur la hessienne, tandis que le pôle correspondant z' est situé sur $\overline{xy}$. En z se coupent d'ailleurs les tangentes de la hessienne aux points x et y: car la tangente en y est, d'après ce qui a été dit plus haut (p. 225), en même temps la polaire linéaire de x relativement à la courbe originaire; cette dernière droite se confond avec la polaire de x relativement au couple de lignes correspondant. Mais actuellement x, y, z sont les sommets du triangle polaire commun aux coniques du faisceau précité; la polaire linéaire de x forme donc le côté opposé à x, et conséquemment elle passe par z, ce qui donne le théorème suivant :

Les tangentes de la courbe de Hesse en deux de ses points

conjugués x et y se coupent sur cette courbe en un point z qui est le point conjugué du troisième point d'intersection de la même courbe avec la droite $\overline{xy}$.

Donc, puisque les polaires linéaires de x et y se coupent en z, la première polaire de z passe nécessairement par x et y, et comme z est un point de la hessienne, et, par suite, la polaire de z un couple de lignes, il en résulte que :

Une droite qui joint deux points conjugués x et y de la hessienne, c'est-à-dire une tangente de la cayleyenne, fait partie intégrante de la première polaire du point z, qui est conjugué au troisième point d'intersection de la ligne $\overline{xy}$ avec la hessienne sur cette dernière courbe. Notre proposition est donc démontrée.

A l'aide de cette nouvelle définition de la cayleyenne, nous pouvons aisément établir son équation. Soit

$$f \equiv a_x \equiv \Sigma\Sigma\Sigma\, a_{ikh} x_i x_k x_h = 0$$

l'équation de la courbe originaire du troisième ordre (on suppose $a_{ikh} = a_{kih} = a_{khi} = a_{hki}$, ainsi que $i + h + k = 3$) et posons

$$f_{ik} = a_{ik1} x_1 + a_{ik2} x_2 + a_{ik3} x_3;$$

la condition pour que la première polaire d'un point x se décompose en deux lignes u et v sera donnée par les équations

$$\begin{aligned} f_{11} &= u_1 v_1, & 2f_{23} &= u_2 v_3 + v_2 u_3, \\ f_{22} &= u_2 v_2, & 2f_{31} &= u_3 v_1 + v_3 u_1, \\ f_{33} &= u_3 v_3, & 2f_{12} &= u_1 v_2 + v_1 u_2. \end{aligned}$$

En éliminant les grandeurs x_i et v_i qui entrent ici linéairement, nous obtenons *l'équation de la cayleyenne* sous la forme

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a_{111} & a_{112} & a_{113} & u_1 & 0 & 0 \\ a_{221} & a_{222} & a_{223} & 0 & u_2 & 0 \\ a_{331} & a_{332} & a_{333} & 0 & 0 & u_3 \\ 2a_{231} & 2a_{232} & 2a_{233} & 0 & u_3 & u_2 \\ 2a_{311} & 2a_{312} & 2a_{313} & u_3 & 0 & u_1 \\ 2a_{121} & 2a_{122} & 2a_{123} & u_2 & u_1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

courbe qui est effectivement de la troisième classe. La même équa-

tion s'obtiendrait, relativement aux quantités v_i, par élimination des quantités x_i et u_i. Si nous supposons en particulier que la courbe du troisième ordre soit donnée sous la forme canonique (8), nous obtenons les équations de condition

$$\begin{aligned} f_{11} &= a x_1 = u_1 v_1, & 2f_{23} &= 2b x_1 = u_2 v_3 + v_2 u_3, \\ f_{22} &= a x_2 = u_2 v_2, & 2f_{31} &= 2b x_2 = u_3 v_1 + v_3 u_1, \\ f_{33} &= a x_3 = u_3 v_3, & 2f_{12} &= 2b x_3 = u_1 v_2 + v_1 u_2, \end{aligned}$$

et de là se tirent, par élimination des quantités x_i, les trois équations

$$\begin{aligned} 2bu_1v_1 - a(u_2v_3 + v_2u_3) &= 0, \\ 2bu_2v_2 - a(u_1v_3 + v_1u_3) &= 0, \\ 2bu_3v_3 - a(u_1v_2 + v_1u_2) &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, après élimination des quantités v_i, il vient pour *l'équation de la cayleyenne sous la forme canonique*

$$\begin{vmatrix} 2bu_1 & -au_3 & -au_2 \\ -au_3 & 2bu_2 & -au_1 \\ -au_2 & -au_1 & 2bu_3 \end{vmatrix} = 0$$

ou, après développement,

$$(2) \qquad a^2 b(u_1^3 + u_2^3 + u_3^3) + (a^3 - 4b^3) u_1 u_2 u_3 = 0.$$

Cette équation est exactement de la même forme que celle de la courbe originaire; la cayleyenne se comporte donc par rapport aux sommets du triangle des coordonnées comme la courbe originaire par rapport aux côtés, et de là résulte que la cayleyenne a les droites harmoniques des points d'inflexion de la courbe primitive pour tangentes de rebroussement, et par suite est comprise dans le système de courbes par nous considéré. La même chose est vraie pour la cayleyenne d'une courbe quelconque du faisceau $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$; car, pour obtenir son équation, il suffit de remplacer dans (2) a par $\varkappa a + \lambda\alpha$, b par $\varkappa b + \lambda\beta$, ce qui n'altère pas la forme de l'équation.

Comme maintenant, dans les neuf couples de lignes qui répondent comme premières polaires aux points d'inflexion, c'est toujours une droite du couple qui est la tangente d'inflexion, ces dernières sont aussi touchées par la cayleyenne et la déterminent complé-

tement. A l'aide de ces éléments de détermination, on peut construire la cayleyenne suivant un procédé qui sera expliqué plus tard. Nous résumons ces résultats et les résultats réciproques dans les propositions suivantes :

Les neuf tangentes d'inflexion d'une courbe quelconque du faisceau à points d'inflexion communs déterminent une courbe de troisième classe, et toutes ces courbes de troisième classe ont les mêmes tangentes de rebroussement.

La courbe de troisième classe déterminée par les neuf tangentes d'inflexion d'une courbe du troisième ordre est l'enveloppe des couples de lignes en lesquels peuvent se décomposer les polaires de certains points relativement à la première courbe, et en même temps l'enveloppe des lignes qui joignent ces points aux points doubles des couples de droites correspondants.

Les neuf points de rebroussement d'une courbe quelconque du système à tangentes de rebroussement communes déterminent une courbe du troisième ordre, et toutes ces courbes du troisième ordre ont les mêmes points d'inflexion.

La courbe du troisième ordre déterminée par les neuf points de rebroussement d'une courbe de la troisième classe est le lieu des couples de points en lesquels peuvent se décomposer les polaires de certaines droites relativement à la première courbe, et en même temps le lieu des points d'intersection de ces droites avec les tangentes doubles des couples de points correspondants.

Parmi les courbes du troisième ordre se trouvaient quatre systèmes de trois droites (triangles inflexionnels); conséquemment, parmi les courbes de troisième classe figurent quatre systèmes de trois points (ce sont les sommets des triangles précités). Ces dernières courbes doivent aussi être touchées par les tangentes d'inflexion d'une courbe du faisceau syzygétique du troisième ordre, et il s'ensuit que :

Parmi les courbes à points d'inflexion communs, il en existe quatre dont les tangentes d'inflexion se coupent trois fois trois à trois en des points qui forment les sommets d'un triangle inflexionnel.

Parmi les courbes à tangentes de rebroussement communes, il en existe quatre dont les points de rebroussement sont situés trois fois trois à trois sur des lignes droites qui forment les côtés d'un triangle inflexionnel.

Ces propositions expriment, pour les courbes dont il s'agit, une

propriété invariante, et plus tard nous établirons l'invariant de l'évanouissement duquel elle dépend.

Nous pourrions aussi considérer la hessienne d'une courbe du troisième ordre comme la jacobienne du réseau de ses premières polaires. Nous avons vu (p. 105) que ce réseau est en même temps le réseau de coniques le plus général, et nous confirmerons ce résultat en établissant précisément l'équation de la courbe du troisième ordre correspondante. Nous pouvons par suite, en partant d'un semblable réseau, définir ainsi la hessienne : elle est le lieu des points doubles des courbes évanouissantes (décomposables) de ce réseau. De même la cayleyenne peut aussi se définir comme l'enveloppe des droites dont se composent ces coniques évanouissantes, et sous ce point de vue on a coutume de la désigner sous le nom de courbe de Hermite ([1]).

L'équation de la jacobienne ou hessienne du réseau de coniques

$$(3) \quad \varkappa a_x^2 + \lambda b_x^2 + \mu c_x^2 \equiv \varkappa \Sigma\Sigma a_{ik} x_i x_k + \lambda \Sigma\Sigma b_{ik} x_i x_k + \mu \Sigma\Sigma c_{ik} x_i x_k = 0$$

est, d'après ce qui précède,

$$(4) \qquad \mathrm{I}(a, b, c) \equiv (abc) a_x b_x c_x = 0.$$

L'équation de la courbe de Hermite par rapport au même réseau se tire des équations

$$2(\varkappa a_{ik} + \lambda b_{ik} + \mu c_{ik}) = u_i v_k + v_i u_k,$$

par élimination de $\varkappa$, λ, μ, v_1, v_2, v_3 ; elle est, par conséquent,

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & b_{11} & c_{11} & u_1 & 0 & 0 \\ a_{22} & b_{22} & c_{22} & 0 & u_2 & 0 \\ a_{33} & b_{33} & c_{33} & 0 & 0 & u_3 \\ 2a_{23} & 2b_{23} & 2c_{23} & 0 & u_3 & u_2 \\ 2a_{31} & 2b_{31} & 2c_{31} & u_3 & 0 & u_1 \\ 2a_{12} & 2b_{12} & 2c_{12} & u_2 & u_1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

([1]) *Voir* HERMITE, *Journal de Crelle*, t. 57. Pour les recherches suivantes sur les réseaux de coniques et systèmes tangentiels correspondants, *voir* SMITH, *Proceedings of the London math. Society*, mai 1868, et ROSANES, *Math. Annalen*, t. VI, p. 264 et suiv. Ces relations ont été dernièrement exposées et étendues par Gundelfinger au moyen de méthodes purement algébriques (*Journal de Crelle*, t. 80, p. 73).

Ce déterminant peut se représenter symboliquement d'une manière très simple, ainsi que nous le verrons incessamment. Nous appelons *points conjugués l'un de l'autre relativement au réseau* deux points de la jacobienne tels, que les polaires de l'un par rapport à toutes les coniques du réseau se coupent en l'autre (p. 96). Deux points ainsi conjugués sont l'un vis-à-vis de l'autre dans le même rapport que deux points de la hessienne d'une courbe du troisième ordre, pôle et point double de ses polaires, que nous avons appelés auparavant *conjugués*. Or, l'enveloppe des lignes de jonction de ces points était la cayleyenne; nous avons donc ce théorème (qui s'établit aussi sans peine directement pour les réseaux de coniques, suivant ce qui a été dit ci-dessus) :

La courbe de Hermite d'un réseau de coniques est l'enveloppe des droites qui joignent deux à deux les points conjugués l'un de l'autre par rapport au réseau.

Si donc nous considérons une tangente de la courbe, les points de rencontre d'une conique quelconque du réseau avec elle seront situés harmoniquement par rapport aux deux points conjugués dont la tangente considérée est la ligne de jonction. Les points d'intersection de cette dernière avec les courbes du réseau seront donc en involution.

Mais la condition pour que trois formes binaires

$$a_\xi^2 = 0, \quad b_\xi^2 = 0, \quad c_\xi^2 = 0$$

représentent des couples de points de la même involution est facile à indiquer; elles doivent, en effet, être situées harmoniquement toutes les trois par rapport au même quatrième couple. Or, les couples $a_\xi^2 = 0$, $b_\xi^2 = 0$ sont dans tous les cas harmoniques au couple $\vartheta_x^2 = (ab)a_\xi b_\xi$ (t. I, p. 268); si donc $c_\xi^2 = 0$ doit être situé harmoniquement par rapport à ce dernier couple, il faut que l'invariant $(\vartheta c)^2$ soit nul. La condition cherchée est par suite donnée par l'équation

$$(\vartheta c)^2 = (ab)(bc)(ac) = 0.$$

Donc, d'après notre principe de translation (t. I, p. 344), l'équation de l'enveloppe des droites qui coupent les coniques

$$a_x^2 = 0, \quad b_x^2 = 0, \quad c_x^2 = 0,$$

aux couples d'une involution, c'est-à-dire *l'équation de la courbe de Hermite par rapport au réseau*, est [1]

(6) $$H(a, b, c) = (abu)(bcu)(acu) = 0.$$

Des résultats semblables ont lieu à l'égard d'un *réseau tangentiel de coniques*, si nous comprenons sous cette expression la figure dualistiquement opposée au réseau, c'est-à-dire un système de coniques donné par l'équation

(7) $$\nu u_\alpha^2 + \rho u_\beta^2 + \sigma u_\gamma^2 = 0.$$

La jacobienne du réseau tangentiel, ou lieu des tangentes doubles des courbes qui se décomposent en un couple de points, est donnée par

(8) $$I(\alpha, \beta, \gamma) \equiv (\alpha\beta\gamma)\, u_\alpha u_\beta u_\gamma = 0,$$

et la courbe de Hermite par rapport à ce système tangentiel est donnée par

(9) $$H(\alpha, \beta, \gamma) \equiv (\alpha\beta x)(\alpha\gamma x)(\beta\gamma x) = 0.$$

On peut maintenant établir une liaison simple entre un réseau ponctuel et un réseau tangentiel de cette nature, de telle sorte que l'un soit immédiatement déterminé par l'autre. Toutes les coniques harmoniquement inscrites à une courbe quelconque du réseau (3) [t. I, p. 368 [2]], c'est-à-dire toutes les coniques $u_\alpha^2 = 0$ dans lesquelles les invariants a_α^2, b_α^2, c_α^2 sont nuls, forment évidemment un réseau tangentiel; car les équations

$$a_\alpha^2 = 0, \quad b_\alpha^2 = 0, \quad c_\alpha^2 = 0$$

donnent *trois* conditions *linéaires* pour les coefficients α_{ik} de u_α^2. Nous appellerons, pour abréger, le réseau tangentiel, qui est *harmoniquement inscrit* au réseau ponctuel, *conjugué* de ce dernier et réciproquement.

---

(1) La comparaison d'un terme quelconque montre que l'expression $H(a, b, c)$ diffère du déterminant (5) par le facteur $-\frac{1}{2}$.

(2) Les mots *inscrit* et *circonscrit*, p. 368 du t. Ier, lignes 6 et 7 en remontant, doivent être intervertis.

Ici s'élève en premier lieu la question de la connexité entre les courbes de Jacobi et de Hermite relatives à un réseau et entre les courbes correspondantes du réseau conjugué; cette question se résout très simplement. Deux points conjugués par rapport au réseau et situés en conséquence sur sa jacobienne sont des pôles harmoniques relativement à toutes les courbes du réseau et forment par suite une conique du réseau tangentiel conjugué; car la condition $a_\alpha^2 = 0$ se transforme pour $u_\alpha^2 = u_x u_y$ en $a_x a_y = 0$. Nous avons donc ce théorème :

La courbe de Jacobi relative à un réseau de coniques est identique à la courbe de Hermite relative au réseau tangentiel conjugué. Et corrélativement :

La courbe de Jacobi relative à un réseau tangentiel de coniques est identique à la courbe de Hermite relative au réseau conjugué.

Nous pouvons tirer de là quelques conclusions sur les rapports entre la hessienne et la cayleyenne d'une courbe du troisième ordre. La première est en même temps (dans le sens dualistique) la cayleyenne de celle des courbes du système à tangentes de rebroussement communes dont le réseau polaire tangentiel de coniques est conjugué au réseau de polaires de la courbe originaire, et la hessienne de cette courbe de troisième classe est identique à la cayleyenne de la cubique primitive.

Or, nous pouvons aussi établir l'équation de cette courbe de troisième classe, à la condition d'avoir obtenu l'équation de la courbe du troisième ordre dont le système polaire se confond avec le réseau (3).

$$\varkappa a_x^2 + \lambda b_x^2 + \mu c_x^2 = 0.$$

Dans ce but, nous admettrons un théorème que nous démontrerons plus tard en étudiant les formes cubiques ternaires. Si une courbe du troisième ordre est donnée par

(10) $$p_x^3 \equiv q_x^3 \equiv r_x^3 \equiv s_x^3 = 0,$$

p, q, r, s étant des symboles de même sens, et que son système de premières polaires doive être identique au réseau (3), l'équation de sa hessienne est

$$\mathrm{I}(a,b,c) = (abc)a_x b_x c_x \equiv i_x^3 \equiv i_x'^3 \equiv i_x''^3 = 0,$$

et celle de sa cayleyenne

$$H(a, b, c) \equiv (abu)(acu)(bcu) \equiv u_h^3 \equiv u_{h'}^3 \equiv u_{h''}^3 = 0.$$

Maintenant, entre p_x^3 et u_h^3 existe (et c'est là la proposition empruntée à la théorie des formes) (*voir* p. 287) la relation

$$(11) \qquad \frac{1}{2} p_h^2 u_h p_x = S u_x,$$

S étant un invariant de la courbe primitive égal à

$$(pqr)(pqs)(prs)(qrs).$$

Or, l'équation (11) exprime que (si S est différent de zéro) *la polaire d'un point x relativement à une courbe du troisième ordre est toujours harmoniquement circonscrite à la polaire d'une droite u relativement à la cayleyenne dans le cas où x et u sont réunis de situation.* Si donc u et v sont deux droites qui se coupent en y, nous pouvons déterminer celle des coniques du réseau (3) qui est la conique polaire de y relativement à la courbe $p_x^3 = 0$, par cette circonstance qu'elle doit être harmoniquement circonscrite aux coniques polaires de u et v relativement à $H(a, b, c) = 0$, c'est-à-dire qu'on aura les équations

$$\begin{aligned} \varkappa a_x^2 + \lambda b_x^2 + \mu c_x^2 &= 0, \\ u_h(\varkappa a_h^2 + \lambda b_h^2 + \mu c_h^2) &= 0, \\ v_h(\varkappa a_h^2 + \lambda b_h^2 + \mu c_h^2) &= 0. \end{aligned}$$

Par élimination de $\varkappa, \lambda, \mu$ on tire de là pour la conique polaire du point d'intersection y de u et v [c'est-à-dire pour $p_x(puv) = 0$] l'équation

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} a_x^2 & b_x^2 & c_x^2 \\ a_h^2 & b_h^2 & c_h^2 \\ a_{h'}^2 & b_{h'}^2 & c_{h'}^2 \end{vmatrix} u_h v_{h'} = 0.$$

Nous avons à transformer ce déterminant de telle manière que les coordonnées de y y entrent au lieu de celles de u et v; si alors nous prenons $y_i = x_i$, il en résulte l'équation cherchée de la courbe $p_x^3 = 0$. Considérons dans ce but le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a_x^2 & b_x^2 & c_x^2 \\ a_y^2 & b_y^2 & c_y^2 \\ a_z^2 & b_z^2 & c_z^2 \end{vmatrix},$$

qui devient le premier membre de (12) si l'on pose $y_i = h_i$, $z_i = h'_i$ et que l'on multiplie par $u_h v_{h'}$.

Le déterminant D s'annule lorsque deux quelconques des systèmes de valeurs a, b, c ou x, y, z deviennent égaux; il est donc une combinaison linéaire des deux formations

$$6(xyz).i_x i_y i_z = (xyz).(abc).\sum_{x,y,z} a_x b_y c_z,$$
$$6(hyz)(hzx)(hxy) = \sum_{u,v,w} (abu)(acv)(bcw),$$

où les signes sommatoires s'étendent à toutes les différentes expressions dérivées de a_x, b_y, c_z par permutation de x, y, z, ainsi que de $(abu)(acv)(bcw)$ par permutation de u, v, w, et où l'on a posé

$$u_1 = (yz)_1 = y_2 z_3 - y_3 z_2 \ldots,$$
$$v_1 = (zx)_1 = z_2 x_3 - z_3 x_2 \ldots,$$
$$w_1 = (xy)_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2 \ldots.$$

Nous avons en conséquence la relation

(13) $$D = m(xyz).i_x i_y i_z + n(hyz)(hzx)(hxy),$$

m et n étant des facteurs numériques. Pour déterminer ces derniers, faisons en particulier

$$x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0;\quad u_1 = 1,\ u_2 = 0,\ u_3 = 0,$$
$$y_1 = 0,\ y_2 = 1,\ y_3 = 0;\quad v_1 = 0,\ v_2 = 1,\ v_3 = 0,$$
$$z_1 = 0,\ z_2 = 0,\ z_3 = 1;\quad w_1 = 0,\ w_2 = 0,\ w_3 = 1,$$

et

$$a_x^2 = x_1^2,\quad b_x^2 = x_2^2,\quad c_x^2 = x_3^2.$$

Alors, comme $8I(a, b, c)$ est égal au déterminant fonctionnel des trois formes, et $H(a, b, c)$ égal au déterminant (5) multiplié par $-\frac{1}{2}$, il vient (¹)

(14) $$I(a, b, c) = x_1 x_2 x_3,\quad H(a, b, c) = -u_1 u_2 u_3,$$

et, par conséquent, dans (13),

$$(xyz) = 1,\quad i_x i_y i_z = \frac{1}{6},\quad (hyz)(hzx)(hxy) = -\frac{1}{6},$$

(¹) *Voir* la note 1 de la p. 250.

tandis que le déterminant D prend, en vertu de notre substitution, la valeur 1. Nous avons par suite

$$6 = m - n.$$

Posons, en second lieu, $a_x^2 = x_2 x_3$, $b_x^2 = x_3 x_1$, $c_x^2 = x_1 x_2$: il viendra d'une manière analogue

$$(15) \qquad \mathrm{I}(a,b,c) = \frac{1}{4} x_1 x_2 x_3, \quad \mathrm{H}(a,b,c) = \frac{1}{2} u_1 u_2 u_3,$$

tandis que D prend actuellement la valeur zéro. L'équation (13) se transforme par suite en

$$0 = m + 2n;$$

et au moyen des équations ainsi obtenues pour m, n on trouve $m = 4$, $n = -2$. Nous avons en conséquence ce résultat (¹) :

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} a_x^2 & b_x^2 & c_x^2 \\ a_y^2 & b_y^2 & c_y^2 \\ a_z^2 & b_z^2 & c_z^2 \end{vmatrix} = 4(xyz) i_x i_y i_z - 2(hyz)(hzx)(hxy).$$

En faisant enfin ici $y_i = h_i$, $z_i = h'_i$ et en multipliant par u_h et $v_{h'}$, nous obtenons dans le premier membre l'expression (12) et dans le second

$$[4(hh'x) i_x i_h i_{h'} - 2(h''hh')(h''h'x)h''xh)] u_h v_{h'},$$

ce qui, d'ailleurs, à cause de la permutabilité de h et h', est égal à

$$[2(hh'x) i_x i_h i_{h'} - (hh'h'')(h''h'x)(hh''x)](u_h v_{h'} - v_h u_{h'}).$$

Si l'on fait dans cette expression $y_i = uv_i$, *l'équation de la polaire du point* y, *relativement à la courbe du troisième ordre dont la hessienne est donnée par* $\mathrm{I}(a,b,c) \equiv i_x^3 = 0$, *et la cayleyenne par* $\mathrm{H}(a,b,c) \equiv u_h^3 = 0$, *sera, par suite,*

$$2(hh'y)(hh'x) i_x i_h i_{h'} - (hh'y)(h''h'x)(hh''x)(hh'h'') = 0.$$

Pour $y_i = x_i$, *nous obtenons donc comme équation de la courbe*

(¹) On peut aussi obtenir cette formule à l'aide des développements en série donnés par Gordan pour les formes à plusieurs séries de variables (*Math. Annalen*, t. V, p. 106).

du troisième ordre dont le réseau polaire coïncide avec le réseau (3) :

(16) $p^3_x \equiv 2(hh'x)^2 i_x i_h i_{h'} - (hh'h'')(hh'x)(h'h''x)(h''hx) = 0.$

Nous pouvons trouver d'une manière tout à fait semblable la courbe de la troisième classe $u_\pi^3 = 0$ dont les polaires coniques forment le réseau tangentiel

$$\nu u_\alpha^2 + \rho u_\beta^2 + \sigma u_\gamma^2 = 0,$$

conjugué à (3). Les équations des courbes de Jacobi et de Hermite, relativement à ce dernier, étant

$$I(\alpha, \beta, \gamma) \equiv u_l^3 = 0, \quad H(\alpha, \beta, \gamma) \equiv H_x^3 = 0,$$

nous avons comme équation de la courbe précitée :

(17) $u_\pi^3 \equiv 2(HH'u)^2 H_l H'_l u_l - (HH'H'')(HH'u)(H'H''u)(H''Hu) = 0.$

Nous pouvons aussi introduire ici les symboles de $I(a, b, c)$ et $H(a, b, c)$, car les courbes $u_l^3 = 0$, $H_x^3 = 0$ sont respectivement identiques aux courbes $u_h^3 = 0$, $i_x^3 = 0$. Nous avons, par conséquent, c, c' désignant des facteurs numériques,

$$I(a, b, c) = c.H(\alpha, \beta, \gamma), \quad H(a, b, c) = c'.I(\alpha, \beta, \gamma).$$

Pour déterminer c, c', considérons de nouveau le réseau spécial de coniques

$$\varkappa x_1^2 + \lambda x_2^2 + \mu x_3^2$$

dont les courbes possèdent un triangle commun, et pour lequel $I(a, b, c)$, $H(a, b, c)$ sont déterminés par (14).

Une conique u_α^2 du réseau tangentiel conjugué doit être harmoniquement inscrite aux lignes doubles $x_1^2 = 0$, $x_2^2 = 0$, $x_3^2 = 0$, c'est-à-dire toucher les lignes $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$; le réseau tangentiel dont il s'agit est donc représenté par

$$\nu u_1 u_2 + \rho u_2 u_3 + \sigma u_3 u_1 = 0,$$

et nous avons, en vertu de (14) et (15),

$$(18) \quad \begin{cases} I(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{4} u_1 u_2 u_3 = -\frac{1}{4} H(a, b, c), \\ H(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{2} x_1 x_2 x_3 = \quad \frac{1}{2} I(a, b, c). \end{cases}$$

On doit, par suite, poser $c = 2$, $c' = -4$, et à l'égard des symboles I, H, h, i existent les relations

$$(18)^* \qquad u_i^3 = -\frac{1}{4}u_h^3, \quad H_x^3 = \frac{1}{2}i_x^3.$$

En introduisant, à l'aide de ces relations, les symboles h, i dans l'équation (17), nous obtenons enfin *comme équation de la courbe de troisième classe dont les polaires coniques forment le réseau tangentiel conjugué au réseau* (3), *courbe dont conséquemment* $H(a, b, c)$ *est la hessienne et* $I(a, b, c)$ *la cayleyenne :*

$$(19) \qquad -8u_\pi^3 \equiv (ii'u)^2 u_h i_h i'_h + (ii'i'')(ii'u)(i'i''u)(i''iu) = 0.$$

La polaire d'un point quelconque y relativement à $p_x^3 = 0$ est harmoniquement circonscrite à la polaire d'une droite quelconque v relativement à $u_\pi^3 = 0$, ainsi qu'il résulte de l'origine de l'équation (19); autrement dit, indépendamment des quantités y et v existe la relation

$$(20) \qquad p_\pi^2 p_y v_\pi = 0.$$

Nous pouvons faire usage des résultats obtenus pour établir *le résultant des trois coniques a_x^2, b_x^2, c_x^2.* Si, en effet, ces courbes doivent avoir en commun un point y, ce point compté double est une conique qui est harmoniquement inscrite à toutes les courbes C_2 du réseau dont il s'agit, ou, en d'autres termes, forme une conique du réseau tangentiel conjugué, et nous pouvons poser $u_\gamma^2 = u_y^2$. Mais alors il vient, d'après les équations (18),

$$I(a, b, c) = 2(\alpha\beta x)(\beta y x)(\alpha y x), \quad H(a, b, c) = -4u_y(\alpha\beta y)u_\alpha u_\beta.$$

La jacobienne $i_x^3 = 0$ a, par conséquent, le point y pour point double, et toutes ses polaires coniques passent par y. Il s'ensuit que la conique $u_y^2 = 0$ est harmoniquement inscrite à *toutes* les coniques du système des premières polaires de $i_x^3 = 0$; en d'autres termes, on peut, dans le réseau tangentiel $\nu u_\alpha^2 + \rho u_\beta^2 + \sigma u_\gamma^2 = 0$, déterminer une courbe (à savoir u_y^2) de telle manière qu'on ait les trois équations

$$\nu i_\alpha^2 i_1 + \rho i_\beta^2 i_1 + \sigma i_\gamma^2 i_1 = 0,$$
$$\nu i_\alpha^2 i_2 + \rho i_\beta^2 i_2 + \sigma i_\gamma^2 i_2 = 0,$$
$$\nu i_\alpha^2 i_3 + \rho i_\beta^2 i_3 + \sigma i_\gamma^2 i_3 = 0,$$

d'où l'on tire, par élimination de ν, ρ, σ,

$$(21)\qquad \begin{vmatrix} i_\alpha^2 i_1 & i_\beta^2 i_1 & i_\gamma^2 i_1 \\ i'^2_{\alpha'} i'_2 & i'^2_{\beta'} i'_2 & i'^2_{\gamma'} i'_2 \\ i''^2_{\alpha''} i''_3 & i''^2_{\beta''} i''_3 & i''^2_{\gamma''} i''_3 \end{vmatrix} \equiv \frac{1}{6}(ii'i'') \begin{vmatrix} i_\alpha^2 & i_\beta^2 & i_\gamma^2 \\ i'^2_{\alpha'} & i'^2_{\beta'} & i'^2_{\gamma'} \\ i''^2_{\alpha''} & i''^2_{\beta''} & i''^2_{\gamma''} \end{vmatrix} = 0.$$

Maintenant existe, corrélativement à la relation trouvée pour le déterminant D ci-dessus, l'équation

$$D' = \begin{vmatrix} u_\alpha^2 & u_\beta^2 & u_\gamma^2 \\ v_\alpha^2 & v_\beta^2 & v_\gamma^2 \\ w_\alpha^2 & w_\beta^2 & w_\gamma^2 \end{vmatrix} = 4(uvw)\,u_l v_l w_l - 2(\mathrm{H}vw)(\mathrm{H}wu)(\mathrm{H}uv),$$

ou, en vertu de (18)*,

$$D' = -(uvw)\,u_h v_h w_h - (ivw)(iwu)(iuv).$$

Mais D′ donne le déterminant qui figure dans (21), si nous y remplaçons u par i, v par i', w par i''. *La condition pour que les trois coniques* $a_x^2 = 0$, $b_x^2 = 0$, $c_x^2 = 0$ *aient un point commun (ou pour que dans le réseau tangentiel conjugué se présente un point comptant double) est donc*

$$(22)\qquad (ii'i'')^2 i_h i'_h i''_h - (ii'i'')(ii'i''')(ii''i''')(i'i''i''') = 0,$$

$i_x^3 = 0$ représentant la courbe de Jacobi relative au réseau et u_h^3 la courbe de Hermite; et réciproquement, au point de vue dualistique, *la condition pour la présence d'une ligne double dans le réseau des coniques* a_x^2, b_x^2, c_x^2 *(ou d'une tangente commune aux courbes du réseau tangentiel conjugué)* (¹) *sera*

$$(23)\qquad 2(hh'h'')^2 i_h i_{h'} i_{h''} + (hh'h'')(hh'h''')(hh''h''')(h'h''h''') = 0.$$

Enfin, comme résultat des développements qui viennent d'être

(¹) Les formations que nous considérons sont (comme il est visible d'après leur sens) des *combinants* du réseau ponctuel ou du réseau tangentiel (*voir* t. I, p. 378 et 259). Leur connexité avec le déterminant D n'est pas fortuite, et Gordan a démontré que *tous* les combinants du réseau sont nécessairement représentables comme invariants fonctionnels du déterminant en question (*Math. Annalen*, t. V, p. 116).

occasionnellement donnés sur le réseau spécial de coniques

$$\varkappa x_1^2 + \lambda x_2^2 + \mu x_3^2 = 0,$$

nous énoncerons les théorèmes suivants :

Le réseau tangentiel conjugué à un réseau ponctuel dont les coniques possèdent un triangle polaire commun se compose des coniques tangentes aux côtés du triangle.

Le réseau tangentiel conjugué à un réseau ponctuel dont les coniques ont trois points communs se compose des coniques qui ont pour triangle polaire le triangle formé par les trois points.

III. — Géométrie sur les courbes du troisième ordre. Leurs modes de génération.

A toute courbe du troisième ordre du faisceau $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$ à points d'inflexion communs répond, en qualité de hessienne, une autre courbe du même faisceau donnée par l'équation

$$\Delta_{\varkappa\lambda} = \mathrm{K}f + \mathrm{L}\Delta = 0,$$

K, L étant du troisième degré en $\varkappa$, λ [*voir* équation (3), p. 230]: mais cette relation entre les deux courbes n'est pas réciproque. Si, en effet, la hessienne de $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$ doit coïncider avec $f = 0$, il faut nécessairement que l'on ait $\mathrm{L} = 0$, afin que la relation $\Delta_{\varkappa\lambda} = \mathrm{K}f$ puisse avoir lieu. Or, comme L renferme les quantités $\varkappa$, λ à la troisième dimension, nous avons ce théorème, qui a été trouvé par Hesse :

Une courbe générale du troisième ordre est la hessienne de trois autres courbes du troisième ordre.

Si nous concevons maintenant une courbe comme la hessienne d'une autre, ses points seront associés par couples de telle manière que la polaire conique de l'un des points du couple aura en l'autre un point double : ce sont, d'après notre terminologie précédente, deux pôles conjugués relativement au réseau de polaires coniques de la courbe primitive choisie, ou, comme nous l'exprimerons pour abréger, *un couple de pôles de la hessienne*. De notre dernier théorème résulte donc ce qui suit :

On peut résoudre une courbe générale du troisième ordre $f = 0$

de trois manières différentes en couples de points (couples de pôles), de telle sorte que les points de chaque couple soient des pôles conjugués relativement au réseau des polaires coniques d'une courbe $\varphi = 0$, dont $f = 0$ est la hessienne (¹).

Nous avons par conséquent sur la courbe trois systèmes différents de couples de pôles. A l'égard des couples d'un système, on a cet important théorème, qui a Hesse pour auteur :

Si l'on réunit en croix les points de deux couples de pôles du même système, les lignes de jonction se coupent sur la courbe, et ces points d'intersection forment un troisième couple de pôles de ce même système.

Ainsi, étant donnés les couples de pôles 1, 1′ et 2, 2′, les couples de lignes $\overline{12}$, $\overline{1'2'}$ et $\overline{12'}$, $\overline{1'2}$ se couperont en deux points 3 et 3′ qui seront encore un couple de pôles. Pour le démontrer, nous prendrons les faux côtés du quadrangle complet déterminé par les lignes $\overline{12}$, $\overline{1'2'}$, $\overline{1'2}$, $\overline{12'}$ pour côtés du triangle des coordonnées, et nous déterminerons ensuite les constantes dans les coordonnées de telle sorte que l'équation d'un des côtés du quadrilatère, $\overline{12}$ par exemple, devienne

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Alors, d'après les théorèmes sur le quadrilatère (t. I, p. 71), on a, pour les équations

$$\begin{aligned} &\text{de } \overline{1'2'} : && x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ &\text{de } \overline{1'2} : && x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ &\text{de } \overline{12'} : && -x_1 + x_2 + x_3 = 0, \end{aligned}$$

et, pour celles de $\overline{11'}$, $\overline{22'}$, $\overline{33'}$,

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0,$$

respectivement.

Les coordonnées des points 1, 1′ sont, par suite de ces fixations,

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & x_2 &= 1, & x_3 &= -1, \\ x_1 &= 0, & x_2 &= 1, & x_3 &= +1; \end{aligned}$$

(¹) *Voir* Maclaurin, et surtout Hesse, *loc. cit.*

donc, pour qu'ils soient des pôles conjugués d'une conique $\Sigma\Sigma a_{ik}x_i x_k = 0$, il faut que l'on ait $a_{22} - a_{33} = 0$, et de même, pour que 2 et 2' soient des pôles conjugués relativement à la même conique, il faut que l'on ait $a_{11} - a_{33} = 0$. Mais de là résulte la troisième équation $a_{11} - a_{22} = 0$, c'est-à-dire que 3, 3' sont aussi des pôles conjugués pour la courbe $\Sigma\Sigma a_{ik}x_i x_k = 0$.

Si donc deux couples de sommets opposés d'un quadrilatère complet sont des pôles conjugués relativement à une conique, il en est de même des points du troisième couple. Et de là résulte immédiatement le théorème établi par nous en ce qui concerne les couples de pôles sur une courbe du troisième ordre, qui ont été définis comme pôles conjugués relativement aux coniques d'un réseau.

De ce théorème nous pouvons, après Schröter, déduire une construction très simple de la courbe du troisième ordre. *Une telle courbe est, en effet, déterminée complètement et sans ambiguïté par trois couples de pôles du même système, et ces couples de pôles peuvent être pris arbitrairement.*

Si, pour le système de pôles en question, $\varphi \equiv \alpha_x^3 = 0$ est l'équation de la courbe primitive sur la hessienne ($f = 0$) de laquelle doivent être situés les couples de pôles, et qu'on désigne par x_i, x'_i; y_i, y'_i; z_i, z'_i les coordonnées des points qui constituent les trois couples, on a les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} \alpha_x\alpha_{x'}\alpha_1 = 0, & \alpha_y\alpha_{y'}\alpha_1 = 0, & \alpha_z\alpha_{z'}\alpha_1 = 0,\\ \alpha_x\alpha_{x'}\alpha_2 = 0, & \alpha_y\alpha_{y'}\alpha_2 = 0, & \alpha_z\alpha_{z'}\alpha_2 = 0,\\ \alpha_x\alpha_{x'}\alpha_3 = 0, & \alpha_y\alpha_{y'}\alpha_3 = 0, & \alpha_z\alpha_{z'}\alpha_3 = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire neuf équations linéaires pour déterminer les coefficients de $\varphi = \alpha_x^3$; mais avec α_x^3 est aussi déterminée la hessienne correspondante, ce qu'il fallait démontrer. Pour apercevoir que les équations (1) sont réellement indépendantes les unes des autres, c'est-à-dire n'admettent pas une infinité de solutions, on peut suivre la marche que voici. On choisira les trois points x, y, z pour sommets d'un triangle de coordonnées; alors les équations suivantes, dérivant de (1), nous seront données pour φ par les points corrélatifs x', y', z':

$$(2)\qquad \begin{cases} \alpha_{x'}\alpha_1^2 = 0, & \alpha_{y'}\alpha_2\alpha_1 = 0, & \alpha_{z'}\alpha_3\alpha_1 = 0,\\ \alpha_{x'}\alpha_1\alpha_2 = 0, & \alpha_{y'}\alpha_2^2 = 0, & \alpha_{z'}\alpha_3\alpha_2 = 0,\\ \alpha_{x'}\alpha_1\alpha_3 = 0, & \alpha_{y'}\alpha_2\alpha_3 = 0, & \alpha_{z'}\alpha_3^2 = 0. \end{cases}$$

Dans ce système d'équations, les coefficients α_{111}, α_{222}, α_{333} n'entrent que dans les équations diagonales, et par conséquent seront déterminés isolément à la fin. Les autres quantités α (abstraction faite de α_{123}, en fonction duquel toutes ces quantités s'expriment) se déterminent alors par couples au moyen de deux des équations (2), α_{112} et α_{122} par exemple, au moyen de

$$\alpha_{112}x'_1 + \alpha_{122}x'_2 + \alpha_{123}x'_3 = 0,$$
$$\alpha_{112}y'_1 + \alpha_{122}y'_2 + \alpha_{123}y'_3 = 0.$$

Toutefois, il faut que $x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1$ soit différent de zéro; en conséquence, la ligne de jonction de deux des points x', y', z' qui répondent aux sommets de coordonnées x, y, z ne doit pas passer par le troisième sommet. *Toutes les conditions nécessaires à la possibilité d'effectuer les opérations sont par conséquent remplies*, si l'on arrête que parmi les six points des trois couples jamais trois points allant ensemble, c'est-à-dire tels qu'il ne s'en trouve pas deux formant un couple, ne soient en ligne droite.

Actuellement, en partant des trois couples donnés 11', 22', 33', on peut construire un nombre quelconque de nouveaux couples, à l'aide du théorème que nous venons de donner, et suivant lequel les lignes de jonction de deux couples se coupent sur la courbe et dans un nouveau couple (¹). On obtient, par exemple, au moyen des points d'intersection des lignes 12, 1'2' et 12', 1'2 un nouveau couple 44', de même au moyen des couples 11', 33' un nouveau couple 55', puis au moyen de 33', 44' un couple 66', au moyen de 55', 22' un nouveau couple 77', et ainsi de suite.

On peut donc, si trois couples de pôles du même système sont donnés sur une courbe du troisième ordre, construire autant de points que l'on voudra de la courbe.

Cette construction, donnée par Schröter, réalise en fait de simplicité le maximum de ce qu'on peut demander; on obtient chaque nouveau point de la courbe comme croisement de deux droites, sans avoir besoin d'autres lignes auxiliaires.

(¹) Cette construction a été indiquée par SCHRÖTER, *Ueber Curven dritter Ordnung* (*Math. Annalen*, t. V, p. 50). *Voir* aussi CLEBSCH, *Ueber zwei Erzeugungsarten der ebenen Curven dritter Ordnung* (*ibid.*, p. 422).

Les courbes unipartites et bipartites du troisième ordre se comportent d'une manière très-différente vis-à-vis de ces trois systèmes de pôles sous le rapport du réel et de l'imaginaire. C'est ce qu'on voit aisément à l'aide du théorème donné plus haut (p. 244), et d'après lequel les tangentes à la courbe aux points d'un couple se coupent de nouveau en un point de la courbe que l'on peut appeler *point tangentiel* correspondant, théorème qui résulte au surplus immédiatement du théorème de Hesse sur le quadrilatère formé par deux couples de pôles, si l'on suppose les deux couples infiniment voisins. Si à l'inverse nous partons du point o comme point tangentiel, nous trouverons comme correspondants les quatre points 1, 2, 3, 4, c'est-à-dire les quatre points de contact des tangentes à la courbe issues du point primitif. Si nous considérons à part le point 1, il ne peut lui répondre comme pôle conjugué dans l'un des trois systèmes qu'un des points 2, 3, 4. Par conséquent, les points 2, 3, 4 sont ceux qui forment respectivement avec 1 un couple dans les trois systèmes de couples de pôles. D'ailleurs, les couples 12 et 34, par exemple, appartiennent au même système, car, dans le cas contraire, il faudrait qu'au point 3, dans le système auquel appartient le couple 12, correspondît ou bien le point 1 ou bien le point 2, ce qui n'est pas possible, puisqu'au point 1 (ou 2), en dehors du point 2 (ou 1), aucun autre ne peut être associé. Nous avons ainsi ce théorème :

Les quatre points de contact des tangentes que l'on peut mener à la courbe par un point de celle-ci forment six couples de pôles, et deux couples qui se complètent appartiennent à l'un des trois systèmes possibles.

Comme aux quatre points de contact des tangentes la courbe primitive est coupée par la polaire conique du point tangentiel, nous pouvons, en ayant égard au théorème de Hesse sur le quadrilatère complet (p. 259), énoncer aussi cette proposition de la manière suivante :

La polaire conique d'un point de la courbe du troisième ordre coupe cette dernière en quatre points dont les lignes de croisement se rencontrent sur la courbe.

Parmi les quatre tangentes considérées, en supposant que leur

point d'intersection commun se trouve sur la portion à trois inflexions, trois touchent toujours l'ovale qui figure dans une courbe bipartite, car à un ovale, comme à une conique, on peut mener deux tangentes par un point extérieur : donc, d'un point situé sur la portion à trois inflexions on ne peut plus mener à celle-ci que deux tangentes. Si au contraire l'ovale manque (ce qui arrive dans les courbes unipartites), deux des quatre tangentes deviennent imaginaires. A une courbe unipartite du troisième ordre on ne peut donc mener par l'un de ses points que deux tangentes *réelles*. D'autre part, on ne peut mener d'un point de l'ovale aucune tangente réelle à la courbe, car une telle tangente devrait encore rencontrer l'ovale en un second point réel, ce qui n'est pas possible, puisque la droite aurait alors quatre points d'intersection avec C_3. De ces développements combinés avec les précédents résulte actuellement ce qui suit relativement à la distribution des couples de pôles sur la courbe.

On peut engendrer une courbe *bipartite* de trois manières différentes au moyen de la construction de Schröter. Dans deux d'entre elles un point du couple de pôles parcourt l'ovale, l'autre la branche à trois inflexions; dans le troisième mode de génération, les points de l'ovale forment un des systèmes de couples, et les points de la portion illimitée l'autre. Dans une courbe *unipartite,* où l'ovale disparaît, le dernier mode de description reste le seul réel; une telle courbe ne peut donc être composée de couples de pôles réels que d'*une manière unique* ([1]).

A l'égard du faisceau de quatre tangentes considéré ici a lieu le théorème suivant, qui est fondamental :

Le rapport anharmonique des quatre tangentes que l'on peut mener à une courbe du troisième ordre par un de ses points est constant pour tous les points de la courbe.

Nous donnerons ici une démonstration géométrique simple qui a pour auteur Salmon, et nous remettons à plus tard une démonstration algébrique directe. D'un point o de la courbe menons à

([1]) A ces considérations se rattachent d'autres conséquences sur la manière dont la forme de la cayleyenne dépend de celle de la hessienne, et . *Voir,* sur ce sujet, Hartnack, *Math. Annalen,* t. IX, p. 9 et suiv.

celle-ci les quatre tangentes

$$o1,\ o2,\ o3,\ o4;$$

leurs points de contact 1, 2, 3, 4 seront situés sur la polaire conique de o. Projetons sur la même conique les points de contact 1′, 2′, 3′, 4′ des quatre tangentes issues d'un point o′, voisin de o. Ces points de projection (c'est-à-dire les points d'intersection des quatre dernières tangentes avec C_2) ne diffèrent des points 1, 2, 3, 4 que de quantités infiniment petites du second ordre, la distance de o à o′ étant une quantité infiniment petite du premier ordre. Comme, d'ailleurs, la polaire conique de o touche la courbe originaire en o, c'est-à-dire (sauf les quantités du second ordre) passe aussi par o′, les rayons menés de o à 1, 2, 3, 4 ont (aux quantités du second ordre près) le même rapport anharmonique que les rayons menés de o′ à 1′, 2′, 3′, 4′ ou de o′ à 1, 2, 3, 4. Le rapport anharmonique des quatre tangentes n'est par suite pas altéré si l'on marche de point en point sur la courbe; il est donc nécessairement constant pour toute la courbe; ce qu'il fallait démontrer.

Nous trouvons ainsi dans ce rapport une constante caractéristique de la courbe, et l'on ne pourra transformer linéairement les unes dans les autres que les courbes du troisième ordre dans lesquelles le rapport anharmonique en question aura la même valeur. Nous avons déjà trouvé dans une autre occasion une constante qui est également caractéristique pour la courbe : c'est le nombre $\frac{b}{a}$ dans la forme d'équation canonique (p. 237)

$$(3) \qquad a(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 6bx_1x_2x_3 = 0.$$

Comme toutes les constantes de la courbe peuvent être altérées par un changement de coordonnées, sauf cette constante unique $\frac{b}{a}$, il s'ensuit que la valeur du rapport anharmonique précité ne doit dépendre que de la quantité $k = \frac{b}{a}$. C'est ce qui est confirmé par la considération suivante. Nous formerons, par exemple, le rapport anharmonique des quatre tangentes qui partent d'un point d'inflexion et dont l'une se confond avec la tangente d'inflexion. Ainsi un point d'inflexion réel est donné (p. 239) par les coordon-

nées $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$. L'équation de sa première polaire se décompose en celle de la tangente d'inflexion

$$(4) \qquad x_1 + x_2 - 2kx_3 = 0$$

et en celle de la droite harmonique correspondante

$$(5) \qquad x_1 - x_2 = 0.$$

Les points d'intersection de cette dernière ligne avec la courbe originaire, c'est-à-dire les points de contact des trois tangentes issues du point d'inflexion, sont donc donnés par (3) si l'on fait $x_1 = x_2$, c'est-à-dire par l'équation

$$(6) \qquad 2x_1^3 + x_3^3 + 6kx_1^2x_3 = 0.$$

Or, le rapport anharmonique cherché est égal à celui que forment les trois points dont il vient d'être parlé avec le point d'intersection de la droite harmonique et de la quatrième tangente, c'est-à-dire de la tangente d'inflexion. Mais pour ce point d'intersection nous avons, en vertu de (4) et (5), les coordonnées

$$\rho x_1 = \rho x_2 = 1, \quad \rho x_3 = \frac{1}{k}.$$

Les coordonnées des quatre points ne dépendent que de k; il en est donc de même de leur rapport anharmonique, ainsi qu'il a été énoncé. Cette exposition se présente encore mieux dans la théorie des formes binaires cubiques, où le rapport anharmonique et la constante k apparaissent l'un et l'autre comme dépendant de l'*invariant absolu* de la courbe ([1]).

Les recherches relatives aux couples de pôles sur la courbe du troisième ordre qui nous ont occupés ici diffèrent essentiellement des considérations que nous avons présentées auparavant en ce qui concerne la géométrie sur une courbe générale d'ordre n. Les recherches dont il s'agit ne sont pas, en effet, susceptibles d'une extension immédiate aux courbes d'ordre supérieur, car une telle courbe ne peut pas en général être regardée comme la hessienne

([1]) *Voir* la fin de la Section V de ce Chapitre. L'invariant absolu est une fonction symétrique des six valeurs différentes que peut prendre le rapport anharmonique de quatre points.

d'une autre. Nous n'insisterons d'ailleurs pas sur la théorie des systèmes de points d'intersection d'une courbe du troisième ordre avec d'autres courbes, devant y revenir plus tard, quand nous appliquerons à cet objet la théorie des fonctions elliptiques. Nous traiterons seulement ici deux problèmes relatifs aux intersections dont il s'agit :

1° La position sur la courbe des points où une conique peut avoir avec elle un contact d'ordre élevé ;

2° Le mode de génération donné par Chasles au moyen d'un faisceau de coniques et d'un faisceau de rayons projectif au premier, mode de description auquel nous rattacherons celui qui porte le nom de Grassmann.

Si nous imposons la condition qu'une conique touche la courbe du troisième ordre aux points où elle la rencontre, nous avons d'abord à distinguer les cas suivants :

1° La conique a un contact simple en trois points;

2° La conique a un contact du second ordre en deux points.

Les autres cas qui peuvent se rencontrer apparaissent comme des cas limites de ceux-là. Dans ces derniers, trois conditions sont données; il existe donc un nombre doublement infini de coniques qui y satisfont. Donc, dans le premier d'entre eux, nous pouvons prendre arbitrairement deux points de contact et chercher la situation du troisième. On détermine ce troisième point au moyen du théorème suivant :

Les points tangentiels des trois points où une conique a un contact simple avec une courbe du troisième ordre sont en ligne droite.

En voici la démonstration. A, B, C étant les trois points de contact, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ leurs points tangentiels (points d'intersection de leurs tangentes avec la courbe), nous avons trois courbes du troisième ordre à huit points communs, savoir :

1° La courbe donnée;

2° Ses trois tangentes en A, B, C;

3° La conique tangente et la ligne $\mathcal{A}\mathcal{B}$.

Les huit points communs sont les points $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et chacun des trois points de contact A, B, C compté deux fois. Les trois courbes ont donc nécessairement le neuvième point $\mathcal{C}$ commun; ce qu'il

fallait démontrer (p. 133). Si maintenant les points A, B sont donnés, il est facile de construire le point C. Nous mènerons les tangentes en A et B, tangentes qui rencontreront encore la courbe en $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. La ligne $\overline{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ fournit alors comme troisième point d'intersection le point $\mathcal{C}$, et nous n'avons plus qu'à mener par ce dernier quatre tangentes à la courbe. Chacun des points de contact est un point C. Toutefois, trois d'entre eux seulement donnent une solution proprement dite. Si nous désignons en effet par D le troisième point d'intersection de la courbe avec $\overline{AB}$, la ligne $\overline{AB}$ prise deux fois fournit aussi une conique tangente aux trois points A, B, D, et le fait que la tangente de D passe également par $\mathcal{C}$ résulte de l'un de nos premiers théorèmes sur les courbes du troisième ordre (p. 227).

Il existe donc trois systèmes différents et composés chacun d'un nombre doublement infini de coniques qui touchent une courbe du troisième ordre en trois points (¹).

Ces trois systèmes sont, à cause de la connexité des couples de pôles avec les points tangentiels, complétement séparés les uns des autres, comme les trois systèmes différents de couples de pôles sur la courbe. De même qu'ici nous sommes ramenés aux couples de pôles, de même, à propos des coniques ayant deux contacts du second ordre, nous arrivons aux points d'inflexion. Soient A et B les deux points de contact. Nous mènerons par ces points trois droites infiniment voisines les unes des autres qui couperont encore la courbe en trois autres points infiniment voisins ; ces derniers seront en ligne droite, c'est-à-dire formeront un point d'inflexion. Nous avons alors encore trois courbes du troisième ordre qui ont en commun huit points, et par conséquent aussi un neuvième point, savoir :

1° La courbe donnée ;

2° Les trois droites voisines menées par A et B ;

3° La ligne qui joint deux des trois premiers points infiniment voisins, et la conique tangente.

(¹) *Voir* PLÜCKER et HESSE (*loc. cit.*), et sur la relation exacte qui lie ces coniques à la courbe, en particulier CREMONA, *Einleitung in die Theorie der algebraischen Curven.*

De là résulte ce théorème :

Toute droite passant par un point d'inflexion d'une courbe du troisième ordre détermine par ses deux autres intersections avec elle deux points tels, qu'une conique peut y avoir simultanément un contact du second ordre.

Et encore, puisque la courbe a neuf points d'inflexion :

Il existe neuf systèmes différents de coniques qui ont un contact du second ordre en deux points d'une courbe du troisième ordre.

Les deux points de contact A, B se confondent en particulier pour les tangentes à la courbe issues du point d'inflexion. Au point de contact d'une tangente de cette nature, une conique peut donc avoir avec la courbe un contact du cinquième ordre. Comme il existe neuf points d'inflexion et que de chacun d'eux on peut mener trois tangentes à la courbe, nous avons ce théorème (¹) :

Il existe vingt-sept coniques qui ont un contact du cinquième ordre avec une courbe du troisième ordre ; leurs points de contact sont les vingt-sept points d'intersection des neuf droites harmoniques avec la courbe.

Nous passons maintenant à l'examen du tracé donné par Chasles pour les courbes du troisième ordre (p. 95). En prenant sur la courbe quatre points arbitraires, nous pouvons par ces points faire passer un nombre infini de coniques. Choisissons-en deux quelconques $\varphi = 0$ et $\psi = 0$. Chacune d'elles coupe encore la courbe en deux points, dont les lignes de jonction seront par exemple $A = 0$ et $B = 0$ respectivement. Nous avons encore une fois trois courbes du troisième ordre à huit points communs, savoir :

1° La courbe originaire ;

2° La conique $\varphi = 0$ et la droite $B = 0$;

3° La conique $\psi = 0$ et la droite $A = 0$.

Elles ont nécessairement en commun un neuvième point qui est le point de rencontre de $A = 0$ et de $B = 0$. Nous obtenons ainsi cette proposition :

(¹) D'après la formule donnée p. 172, on trouverait 36 au lieu de 27 pour le nombre de ces coniques ; mais dans ce nombre de 36 sont comprises les neuf tangentes d'inflexion (comptées chacune deux fois).

Toute conique d'un faisceau dont quatre points de base sont situés sur la courbe du troisième ordre coupe cette dernière en deux points mobiles dont la ligne de jonction passe toujours par un point fixe de la courbe, que nous appellerons point opposé *aux quatre points de base.*

Ce théorème est au surplus une conséquence immédiate du théorème du reste : *Le faisceau de rayons est équivalent au faisceau de coniques* (p. 141). Les deux faisceaux sont également projectifs entre eux [1], car, si $f = 0$ est l'équation de la courbe originaire, on doit avoir

$$f = \varkappa\varphi B - \lambda\psi A,$$

$\varkappa$, λ étant des constantes. L'équation $f = 0$ résulte donc de l'élimination de μ entre les deux autres équations

$$\varphi + \mu\psi = 0, \quad \lambda A + \mu\varkappa B = 0.$$

Si donc on prend quatre points quelconques d'une courbe du troisième ordre pour points de base d'un faisceau de coniques, le point opposé donne le sommet d'un faisceau de rayons qui, conjointement avec le faisceau de coniques, engendre la courbe du troisième ordre suivant le procédé de Chasles.

A l'aide de ces théorèmes, on peut *effectuer la construction d'une courbe du troisième ordre dont neuf points sont donnés* [2]. Les neuf points ne doivent naturellement pas être situés de telle sorte qu'il s'y croise une infinité de courbes du troisième ordre, car le problème serait alors indéterminé. Il suffit d'indiquer comment la solution peut être réalisée. On choisit quatre des points donnés pour points de base d'un faisceau de coniques; on peut alors commencer par construire le point M opposé à ces quatre points sur la courbe à tracer, et ce point s'obtient comme quatrième intersection de deux coniques dont trois autres intersections sont données. Le point M ainsi trouvé, on peut facilement établir entre un faisceau de rayons passant par M et le faisceau de coniques une

---

(1) Cela résulte d'ailleurs déjà de la relation à détermination unique des deux faisceaux.

(2) *Voir* CHASLES, *Construction de la courbe du troisième ordre déterminée par neuf points* (*Comptes rendus*, mai 1853). On trouve aussi la solution du problème traitée d'une manière approfondie dans les Ouvrages cités de Cremona et de Durège.

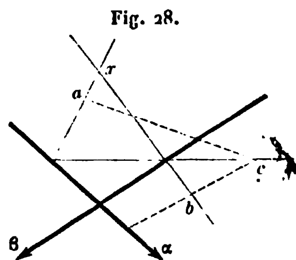
liaison telle que tous deux engendrent la courbe cherchée suivant le procédé de Chasles et que par suite on en trouve les points deux à deux comme points de rencontre d'un rayon avec une conique (t. I, p. 65).

Au problème traité ici se rattache immédiatement le suivant: *Étant donnés huit points quelconques, on demande de construire le neuvième point qui, réuni aux premiers, laisse la courbe du troisième ordre indéterminée.* La solution repose essentiellement sur la construction du point opposé à quatre des points donnés pour deux courbes différentes du faisceau qui passe par les huit points et sur l'application de cette proposition, facile à démontrer, que *le lieu des points opposés à quatre points de base d'un faisceau de courbes du troisième ordre sur différentes courbes de ce faisceau est une conique passant par les cinq autres points de base.*

A côté des modes de description de Schröter et de Chasles s'en place un autre qui a été trouvé par Grassmann (¹) et appliqué aux courbes d'ordre quelconque; ce dernier est d'un caractère essentiellement différent et en quelque sorte mécanique. Nous en donnerons d'abord l'énoncé pour les coniques, à l'égard desquelles il a déjà été formellement indiqué par Maclaurin et Taylor (²). Nous avons ce théorème:

Si un point x se meut de telle manière que les lignes qui le joignent respectivement à deux points fixes a, b coupent deux

Fig. 28.



droites fixes α, β en deux points dont la ligne de jonction passe par un point fixe c, le point x décrit une conique (*fig.* 28).

(¹) GRASSMANN, *Die lineale Ausdehnungslehre*, Leipzig, 1844, et différents Mémoires dans le *Journal de Crelle*, t. 31, 36, 42, 52.

(²) *Voir* aussi CHASLES, *Aperçu historique*.

Si nous désignons, en effet, les coordonnées des points x, a, b, c respectivement par x_i, a_i, b_i, c_i, et celles des droites α, β respectivement par α_i, β_i, nous aurons, pour les coordonnées de la ligne qui joint x et a,

$$u_1 = (xa)_1, \quad u_2 = (xa)_2, \quad u_3 = (xa)_3,$$

en posant, pour abréger,

$$(xa)_1 = x_2 a_3 - x_3 a_2, \quad (xa)_2 = x_3 a_1 - x_1 a_3, \quad (xa)_3 = x_1 a_2 - x_2 a_1.$$

De même les coordonnées de la ligne qui joint x et b sont

$$v_1 = (xb)_1, \quad v_2 = (xb)_2, \quad v_3 = (xb)_3,$$

et, par conséquent, celles du point d'intersection de u et de α seront

$$(7) \quad \begin{cases} y_1 = (xa)_2 \alpha_3 - (xa)_3 \alpha_2 = [(xa), \alpha]_1, \\ y_2 = (xa)_3 \alpha_1 - (xa)_1 \alpha_3 = [(xa), \alpha]_2, \\ y_3 = (xa)_1 \alpha_2 - (xa)_2 \alpha_1 = [(xa), \alpha]_3, \end{cases}$$

et l'on aura de même, pour les coordonnées du point de rencontre de v et de β,

$$(8) \qquad z_i = [(xb), \beta]_i.$$

Maintenant les points y, z et c sont assujettis à être en ligne droite, c'est-à-dire que l'on a l'équation

$$(9) \quad \begin{vmatrix} [(xa), \alpha]_1 & [(xb), \beta]_1 & c_1 \\ [(xa), \alpha]_2 & [(xb), \beta]_2 & c_2 \\ [(xa), \alpha]_3 & [(xb), \beta]_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

laquelle est du second ordre en x et représente conséquemment une conique. On peut aussi vérifier sans peine ce résultat géométriquement. Le faisceau de rayons ayant c pour sommet coupe, en effet, α et β en deux séries de points placées perspectivement; les lignes qui joignent respectivement ces points d'intersection à a et b donnent deux faisceaux projectifs de rayons ayant a et b pour sommets : donc *le point d'intersection x de deux rayons correspondants de ces derniers décrit en fait une conique.* On reconnaît en même temps que cette courbe passe par les points a, b et par le point d'intersection de α, β. Elle renferme aussi nécessairement le

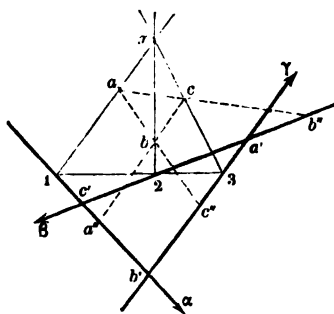
point de rencontre de $\overline{ac}$ et β, ainsi que celui de $\overline{bc}$ et α, car pour ces points la condition du théorème est remplie en toute hypothèse. On obtient ainsi immédiatement cinq points de la conique.

A l'égard des courbes du troisième ordre, nous pouvons énoncer de la manière suivante le mode de description de Grassmann :

Un point x décrit une courbe du troisième ordre si les lignes qui le joignent à trois points fixes a, b, c rencontrent séparément trois droites fixes α, β, γ en trois points situés sur une droite (mobile). Cette droite enveloppe une courbe de troisième classe (fig. 29).

La dernière partie du théorème n'est qu'une conséquence de la première, car la droite mobile se meut précisément de telle sorte que ses points de rencontre avec trois droites fixes α, β, γ, joints à

Fig. 29.



trois points fixes a, b, c, produisent trois droites qui se coupent en un point (mobile) x, et cette propriété correspond dualistiquement d'une manière complète à la condition imposée au point x.

L'équation de la courbe du troisième ordre ainsi engendrée peut s'établir directement. Les coordonnées du point de rencontre des lignes $\overline{xa}$ et α, et de celui des lignes $\overline{xb}$ et β, sont encore données par les équations (7) et (8). Les coordonnées du point de rencontre de $\overline{xc}$ et γ seront, d'une manière analogue,

$$t_i = [(xc), \gamma]_i. \tag{10}$$

Actuellement les points y, z, t devant toujours être en ligne

droite, il en résulte

$$(11)\quad \begin{vmatrix} [(xa),\alpha]_1 & [(xb),\beta]_1 & [(xc),\gamma]_1 \\ [(xa),\alpha]_2 & [(xb),\beta]_2 & [(xc),\gamma]_2 \\ [(xa),\alpha]_3 & [(xb),\beta]_3 & [(xc),\gamma]_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui est l'équation de notre courbe du troisième ordre. Nous pouvons aisément aussi indiquer neuf points par lesquels la courbe est déterminée; ce sont les suivants (*fig.* 29) :

1° Les points a, b, c;

2° Les sommets a', b', c' du triangle α, β, γ;

3° Les points a'', b'', c'' où les droites α, β, γ sont rencontrées respectivement par les droites $\overline{bc}$, $\overline{ca}$, $\overline{ab}$.

On reconnaît en effet facilement, à l'examen de la figure, que les conditions de notre théorème sont satisfaites d'elles-mêmes dès que x est situé en l'un de ces neuf points. Ces derniers ont vis-à-vis les uns des autres une situation particulière, mais non de telle nature qu'un nombre infini d'autres courbes du troisième ordre puissent s'y rencontrer. On l'établit en observant simplement que nous avons été conduits dans (11) à une courbe complétement déterminée, ou encore de la manière suivante. Par les huit points

$$a'',\ b'',\ c'';\ a',\ b',\ c';\ a,\ b$$

passe, outre une courbe générale du troisième ordre, la courbe qui se compose des droites α, β, ab; or le neuvième point qui leur est commun est le point c', compté deux fois comme point de rencontre de α et β, et par conséquent *n'est pas* le point c.

C. Q. F. D.

La question de savoir comment, étant donnée une courbe du troisième ordre, on peut trouver les éléments qui lui donnent naissance d'après le procédé de Grassmann, présente un intérêt particulier (¹). Par là se trouvera démontrée en même temps la proposition que *toute* courbe du troisième ordre peut être engendrée de cette manière. Nous revenons au système précité de neuf points. Sa propriété caractéristique et déterminante consiste en ce que les points a, b, c et a', b', c' forment deux triangles dont les

(¹) *Voir* Clebsch, *Math. Annalen*, t. V, p. 424.

sommets sont situés sur la courbe et dont les côtés se coupent corrélativement sur la courbe en a'', b'', c''. Si nous considérons ces trois derniers points comme donnés arbitrairement sur la courbe, nous avons à résoudre le problème suivant :

Trouver un triangle dont les sommets a, b, c sont situés sur la courbe du troisième ordre et dont les côtés passent séparément par trois points a'', b'', c'' donnés sur la courbe.

Deux triangles de cette nature une fois trouvés forment la base d'une description de la courbe suivant le procédé de Grassmann, et cela d'une double manière, car le choix que l'on fait de l'un de ces triangles pour triangle abc et de l'autre pour triangle $\alpha\beta\gamma$ est indifférent. Nous montrerons qu'on peut toujours trouver quatre triangles répondant aux points a'', b'', c''; ces triangles forment six couples, et l'on a en conséquence cette proposition :

Trois points donnés arbitrairement sur une courbe du troisième ordre conduisent à douze manières d'engendrer la courbe suivant la méthode de Grassmann.

Les quatre triangles dont il a été parlé s'obtiennent de la manière suivante. Joignons les points b'' et c'' par une droite que nous supposerons rencontrer la courbe en d; nous admettrons aussi que la courbe soit coupée par la ligne $\overline{a''d}$ en a'''. De ce dernier point a''' menons à la courbe une tangente dont a sera le point de contact, et soient c et b les points que les lignes joignant a à b'' et c'' déterminent sur cette tangente. Nous affirmons qu'alors la droite $\overline{a''b}$ passe aussi par c et que par conséquent les points a, b, c forment un triangle de l'espèce cherchée. Nous avons en effet trois courbes du troisième ordre :

1° La courbe originaire donnée,

2° Les lignes $\overline{da''a'''}$, $\overline{b''ac}$, $\overline{c''ab}$,

3° Les lignes $\overline{db''c''}$, $\overline{a'''aa}$, $\overline{a''b}$,

qui se coupent aux points a'', b'', c'', d, b, a''' et au point comptant doublement a, par conséquent en huit points ; elles ont donc le neuvième point c commun. Comme maintenant nous pouvons mener de a''' quatre tangentes à la courbe, et comme, ainsi qu'on peut le voir facilement, la construction de deux points b''' ou c'''

trouvés d'une manière analogue à a''' ne donnerait rien de nouveau, nous avons ce théorème :

Il existe quatre triangles dont les sommets sont situés sur la courbe du troisième ordre et dont les côtés passent séparément par trois points donnés sur la courbe.

De ce que les points a, b, c ont été trouvés comme points de contact des tangentes issues de a''', b''', c''', on tire la conséquence suivante :

Ayant un triangle de l'espèce considérée, on en déduira les trois autres en cherchant par rapport aux sommets du premier les trois systèmes de pôles conjugués qui leur correspondent sur la courbe envisagée comme hessienne de trois autres courbes. Par cette relation du mode de description de Grassmann avec les systèmes de couples de pôles conjugués se trouve établie sa connexion avec le mode de description de Schröter qui a été exposé plus haut. On reconnaît immédiatement que *la même courbe, obtenue par le procédé de Grassmann au moyen des points a, b, c et des lignes* α, β, γ, *est aussi constructible suivant le procédé de Schröter au moyen des trois couples de points* a, a'; b, b'; c, c'.

On vérifie aussi sans peine, directement, que ces couples de points sont bien des couples de pôles conjugués. Pour cet objet, il suffit de montrer que les points d'intersection des lignes ab' et $a'b$, ou ac' et $a'c$ ou bc' et $b'c$ sont encore situés sur la courbe ; or il en est évidemment ainsi, car, si l'on joint par exemple le point de rencontre des deux dernières lignes à a, b, c, les points de rencontre de ces lignes de jonction sont situés sur une droite, comme le demande le mode de description de Grassmann, à savoir la droite α.

Donc, tandis que le mécanisme de Grassmann donne naissance à la courbe par un procédé continu, la méthode de Schröter fournit un moyen de construire linéairement autant de points séparés que l'on voudra de la courbe.

Après avoir ainsi établi la dépendance respective qui existe entre ces deux modes de description, on demandera encore de les ramener au mode de description de Chasles, et voici comment on peut y parvenir. On regardera dans la *fig.* 29 le point 3 comme fixe, et l'on se servira des points a, b, 3 et des lignes α, β pour

engendrer une conique suivant la méthode de Grassmann, de telle manière que les lignes joignant le point décrivant x à a et b rencontrent respectivement les lignes α, β en des points dont la ligne de jonction passe par 3. Cette conique passe aussi en toute hypothèse par le point d'intersection d des lignes ab' et bd', car les lignes qui joignent ce point à a et b coupent les lignes α, β précisément en b', d', qui, de même que 3, sont situés sur γ. Ainsi le point d est toujours le même de quelque manière que 3 puisse être situé sur la ligne γ; si donc on fait mouvoir 3 sur γ, et que l'on construise de la manière indiquée pour chaque position de γ une conique, toutes ces coniques forment un faisceau dont les points de base sont situés en a, b, d', d. Ajoutons maintenant encore le point c. A chaque position de 3 correspond aussi un rayon passant par c, la ligne de jonction de 3 avec c, laquelle passe aussi par x. Par l'intermédiaire du point mobile 3, le faisceau de rayons passant par c se trouve donc relié projectivement au faisceau précité de coniques, et *les points d'intersection x des courbes correspondantes des deux faisceaux engendrent la courbe même que nous avons précédemment obtenue d'une autre manière*. Au lieu du point c nous pouvons, comme cela va de soi, prendre aussi le point a ou le point b. Il est encore à remarquer que le faisceau de coniques employé ici est dans une situation spéciale par rapport au faisceau de rayons, puisqu'un point de base du premier forme avec le sommet du second un couple de pôles sur la courbe construite; on ne pourra donc pas, inversement, tirer immédiatement des éléments donnés d'un tracé par la méthode de Chasles les éléments des modes de description de Schröter et de Grassmann relatifs à la même courbe (¹).

(¹) Il y a lieu au surplus de faire des réflexions analogues en ce qui concerne les modes de description de Grassmann, de Chasles et de Jonquières pour une courbe d'ordre quelconque. Si, par exemple, dans la *fig.* 29, on fait mouvoir le point c sur une nouvelle droite δ, et que l'on construise pour tout point de cette droite, considéré comme point c, la courbe C_3 qui lui correspond, ces courbes C_3, en nombre infini, formeront un faisceau dont les neuf points de base sont faciles à indiquer. Un faisceau de rayons projectif relativement au faisceau de coniques s'obtient de la manière suivante : Joignons chaque point c de δ à un point fixe d, puis le point de rencontre de cette ligne de jonction et d'une droite fixe ε à un nouveau point fixe e. Le faisceau de sommet e est alors projectif par rapport à la série de points décrite sur δ, et conséquemment par rapport au faisceau curviligne précédent. On obtient ainsi le

IV. — Les formes cubiques ternaires.

Nous avons déjà plusieurs fois, lorsqu'il s'est agi de traiter d'une manière complète certains problèmes relatifs aux courbes du troisième ordre, renvoyé à la théorie des formes cubiques ternaires. En réalité, cette dernière ne nous fournira pas seulement une représentation algébrique élégante des questions que nous avons étudiées; elle nous amènera encore à dépasser les limites du champ de nos précédentes considérations, ainsi qu'il est arrivé pour les formes ternaires quadratiques. Ainsi, tandis que la théorie des formes a eu d'abord son origine dans la nécessité de formuler algébriquement les problèmes de la Géométrie projective, intervient maintenant à l'inverse un retour de l'Algèbre sur la Géométrie : c'est la tâche de cette dernière de s'approprier les conceptions de l'Algèbre et d'élargir ainsi son propre cercle dans diverses directions, ce qui s'est produit par exemple à l'égard de la notion des polaires. Dans ce qui suit, nous commencerons par pousser la théorie des formes cubiques (¹) aussi loin qu'il est nécessaire pour l'étude complète des points d'inflexion; quant aux autres formations et à leur coordination entre elles, nous n'y toucherons que d'une manière fugitive, surtout parce que leur sens géométrique n'a pas encore été complétement saisi.

---

tracé d'une courbe C_4, tracé qui peut aisément aussi se formuler dans la méthode de Grassmann. Les choses sont encore plus simples si l'on détermine la courbe par deux faisceaux de coniques C_2. Un faisceau de cette espèce s'obtient, sur la *fig.* 28, en faisant mouvoir c sur une droite γ, et un second dérive d'une figure correspondante dans laquelle a, b, c, α, β ont été remplacés par a', b', c', α', β', et où c' se meut sur γ'. On peut établir la relation projective entre ces deux faisceaux en reliant perspectivement au moyen d'un point fixe les séries ponctuelles ayant γ et γ' pour bases. On peut démontrer que tout tracé suivant la méthode de Grassmann peut être ainsi ramené à un tracé de Chasles, c'est-à-dire que, avec les éléments de l'un, on peut déterminer les éléments de l'autre.

(¹) Les commencements de ces doctrines se trouvent dans les travaux de Hesse, sur les points d'inflexion. Aronhold, dans le *Journal de Crelle*, t. 39 (1849), s'est attaché surtout à donner les deux invariants. Cayley a repris cette étude avec développement, en y joignant celle des covariants et des formes adjointes du troisième et du sixième ordre, dans son troisième *Memoir upon quantics* (1856). Les bases d'une exposition systématique du sujet ont été posées dans le travail de Aronhold (*Journal de Crelle*, t. 55, 1858), où l'auteur a coordonné et étendu ses résultats de 1849. On doit encore citer, pour le développement de la théorie, Clebsch et Gordan, *Math.*

A l'égard des *formes cubiques ternaires,* nous avons d'abord à considérer deux groupes de formations dont l'un est emprunté à la théorie des formes *binaires cubiques,* l'autre à la théorie des formes *ternaires quadratiques.*

Si l'on désigne symboliquement une forme cubique binaire par $f = a_\xi^3$, le système de ses formations annexes comprend, comme on sait (t. I, p. 271), les suivantes [1] :

$$(1) \quad \begin{cases} \tau = (ab)^2 a_\xi b_\xi = \tau_\xi^2, \quad Q = (c\tau) c_\xi^2 \tau_\xi = (ab)^2 (ca) c_\xi^2 b_\xi, \\ B = (\tau\tau')^2 = (ab)^2 (cd)^2 (ac)(bd). \end{cases}$$

De ces formes on en tire immédiatement d'autres qui appartiennent à une forme cubique ternaire

$$(2) \qquad f = a_x^3$$

en faisant usage de notre principe de translation (t. I, p. 344), savoir :

$$(3) \quad \begin{cases} \Theta = (abu)^2 a_x b_x, \\ Q = (abu)^2 (cau) c_x^2 b_x, \\ F = (abu)^2 (cdu)^2 (acu)(bdu). \end{cases}$$

Le sens géométrique des figures obtenues en égalant ces formes à zéro résulte immédiatement de notre principe de translation et nous est déjà partiellement connu :

L'équation F = o *est l'équation de la courbe* f = o *en coordonnées-lignes* (t. I, p. 345).

L'équation Θ = o *donne pour x constant l'équation de la première polaire de x en coordonnées-lignes, pour u constant le lieu des pôles x dont les premières polaires touchent la ligne u, ou ce qu'on nomme la* poloconique *de la droite u* (p. 17).

A l'égard de cette dernière courbe le principe de translation

Annalen, t. I et VI, GORDAN, *ibid.*, t. I, GUNDELFINGER, *ibid.*, t. IV et V, et CAYLEY, *Seventh Memoir upon quantics* (*Philos. Transactions*, 1861. *Voir* un *Résumé des différentes dénominations ou notations en usage* (*Math. Annalen*, t. VI, p. 439, note).

(1) Les formes désignées auparavant dans la théorie des formes binaires par Δ et R le sont ici par τ et B, pour éviter les confusions produites par des dénominations similaires.

entraîne, en vertu de la signification du couple de points $\tau = 0$ dans les formes binaires, le théorème suivant :

Les points d'intersection de la poloconique d'une droite u avec cette droite sont situés équianharmoniquement par rapport aux points d'intersection de u avec la courbe originaire $f = 0$.

La signification de $Q = 0$ se trouve en observant que Q tire son origine de la formation

$$Q' = (abu)^2 (auv) b_x$$

si l'on y fait $v_i = c_i c_x^2$. Mais $Q' = 0$ est la condition pour que le point x et le point de rencontre des lignes u, v soient conjugués l'un à l'autre par rapport à la poloconique de la droite u; si donc on pose pour v les coordonnées $c_i c_x^2$ de la polaire linéaire de x, il en résulte cette conséquence :

Par l'équation $Q = 0$, *à toute droite u est associée une courbe du troisième ordre comme lieu des pôles x dont les polaires linéaires sont rencontrées par la ligne u en un point qui est conjugué à x relativement à la poloconique de u*, et, à cause du sens du groupe ternaire $Q = 0$ dans les formes binaires et de sa relation avec $\tau = 0$, à chacun des trois points où la ligne u est rencontrée par la courbe qui présente cette dépendance avec elle, un des trois points de rencontre de u avec la courbe primitive est associé de telle manière que les trois couples forment une involution; les points doubles de cette involution sont les points d'intersection de la ligne u avec sa poloconique.

Nous ne ferons d'ailleurs aucun usage de la forme Q dans ce qui suit. Au contraire, la forme Θ a pour nous une importance particulière. Nous la désignons symboliquement par

$$(4) \qquad \Theta = \Theta_x^2 u_\vartheta^2 = \Theta_x'^2 u_{\vartheta'}^2,$$

de sorte que le produit de deux facteurs Θ et de deux facteurs ϑ reçoit seul une signification effective, savoir

$$2\Theta_i \Theta_k \vartheta_l \vartheta_m = (a_i b_k + b_i a_k)(ab)_l (ab)_m.$$

En vertu de la permutabilité de a et b, on a donc

$$(abu)^2 a_i b_k = \Theta_i \Theta_k u_\vartheta^2,$$

et de là résulte une représentation plus simple des formes Q et F, *car on peut, d'après cela, dans une forme qui a le facteur* $(abu)^2$, *remplacer toujours ce dernier par* u_ϑ^2, *pourvu que l'on remplace en même temps les lettres a et b qui entrent encore linéairement dans la forme toutes deux par les symboles* Θ (¹). On a donc aussi

$$Q = u_\vartheta^2 (c\Theta u)\, c_x^2\, \Theta_x, \quad F = u_\vartheta^2 (cdu)^2 (\Theta c u)(\Theta d u),$$

et, en observant que F renferme encore le facteur $(cdu)^2$ et employant de nouveau le même procédé,

$$F = u_\vartheta^2 u_{\vartheta'}^2 (\Theta\Theta' u)^2, \tag{5}$$

ce qui, égalé à zéro, n'est autre chose que l'équation en coordonnées-lignes de la conique $\Theta_x^2 u_\vartheta^2$ donnée en coordonnées-points; on a donc aussi, en posant $\Theta_{ik} = \frac{1}{2}\frac{\partial\Theta}{\partial x_i \partial x_k}$ (²),

$$F = -2 \begin{vmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} & u_1 \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \Theta_{23} & u_2 \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Nous pouvons encore définir Θ (et par conséquent aussi F) non symboliquement, puisque Θ fournit l'équation en coordonnées-lignes de la conique $a_y^2 a_x = \Sigma\Sigma f_{ik} y_i y_k$ $\left(\text{on a fait ici } f_{ik} = \frac{1}{6}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\right)$, et il vient (p. 18)

$$\Theta = -2 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & u_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & u_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Géométriquement, nous pouvons concevoir l'équation (5) de la manière suivante. $F = 0$ est l'équation de la poloconique de u en

---

(¹) De là résulte aussi, par formation polaire, que $(abu)(abv)\,a_i b_k = \Theta_i \Theta_k u_\vartheta v_\vartheta$.

(²) En ce qui concerne le facteur numérique, *voir* la théorie des formes quadratiques, t. I, p. 346 et 354.

coordonnées-lignes; mais, comme ces coordonnées-lignes ont été supposées elles-mêmes égales aux quantités u, c'est là la condition pour que la poloconique de u touche cette ligne elle-même.

Les tangentes de la courbe primitive sont ainsi définies par la circonstance qu'elles sont touchées par leurs poloconiques (¹).

L'autre groupe des formes que nous avons à considérer dérive des formes quadratiques ternaires d'après ce principe que les invariants et les formes adjointes des polaires donnent respectivement des covariants et des formes mixtes de la forme primitive. Le système d'une forme quadratique ternaire a_x^2 se compose des formations

$$\varphi = (abu)^2, \quad A = (abc)^2.$$

Dans le passage aux formes cubiques, nous n'avons qu'à ajouter à tout symbole $a, b, \ldots$ un facteur linéaire symbolique $a_x, b_x, \ldots$ et nous obtenons ainsi les formations

$$(8) \qquad \begin{cases} \Theta = (abu)^2 a_x b_x, \\ \Delta = (abc)^2 a_x b_x c_x, \end{cases}$$

dont la première se confond avec la forme ainsi désignée plus haut. La seconde est le *déterminant de Hesse,* qui nous est bien connu. Elle dérive aussi de Θ si l'on fait $u_i u_k = c_i c_k c_x$; elle peut donc être représentée, en faisant usage de la désignation symbolique (4), par

$$(9) \qquad \Delta = \Theta_x^2 c_\vartheta^2 c_x.$$

Il ne peut exister de covariant d'ordre moins élevé que Δ, ce dont on se convainc aisément par les réflexions générales qui suivent. Si un covariant d'une forme du $n^{\text{ième}}$ ordre est de degré $\varkappa$ par rapport aux coefficients, il renferme $\varkappa$ symboles différents chacun n fois, et par conséquent $\varkappa n$ séries de symboles. Mais ce même nombre doit aussi être égal à $3\lambda + \mu$, μ désignant l'ordre du covariant et λ le nombre des facteurs déterminants symboliques

(¹) Cela résulte aussi directement de la théorie des formes cubiques binaires; car $\tau = 0$ a toujours et exclusivement deux racines égales en même temps que $f = 0$.

qui s'y rencontrent. Nous avons donc

$$\varkappa n = 3\lambda + \mu.$$

On trouve de même, pour une forme adjointe de classe ν et de degré $\varkappa$ à λ facteurs déterminants,

$$\varkappa n = 3\lambda - \nu;$$

et enfin, pour une forme mixte d'ordre μ, de classe ν et de degré $\varkappa$,

$$\varkappa n = 3\lambda + \mu - \nu.$$

De ces trois équations résulte, pour le cas où n est divisible par 3, le théorème suivant :

Si l'ordre d'une forme ternaire est divisible par 3, *elle ne possède que des covariants et des formes adjointes dont l'ordre ou la classe est divisible par* 3, *et que des formes mixtes dans lesquelles la même chose a lieu pour la différence entre l'ordre et la classe.*

Un résultat semblable se produit à l'égard des formations invariantes qui appartiennent à une forme primitive, à r variables homogènes, si l'ordre de cette forme primitive est divisible par r.

Nous pouvons établir des considérations générales analogues en ce qui concerne les invariants. Comme une telle fonction est toujours composée de facteurs du type (abc) (t. I, p. 339), elle doit être au moins du troisième degré, cas où la formation $(abc)^n$ est seule possible. Or cette dernière ne change pas de signe, lorsqu'il y a permutation de deux symboles, si n est impair; elle s'évanouit donc identiquement : *Une forme d'ordre impair ne possède aucun invariant du troisième degré.* D'ailleurs, à l'égard d'un invariant de degré $\varkappa$ et à λ facteurs déterminants, on doit toujours (en posant $\mu = \nu = 0$ dans les précédentes équations) avoir la relation $\varkappa n = 3\lambda$, c'est-à-dire qu'*un invariant de degré* $\varkappa$ *renferme* $\frac{1}{3}\varkappa n$ *facteurs déterminants.*

Un invariant de la forme cubique doit donc être au moins du quatrième degré et renfermer quatre facteurs déterminants. Nous pouvons, en effet, former directement une telle fonction avec les quatre symboles a, b, c, d : comme aucun facteur déterminant ne

peut renfermer deux fois le même symbole, le premier facteur déterminant est en toute hypothèse (abc); les trois autres doivent chacun renfermer une fois d, et il ne reste pour la manière d'y répartir les autres symboles a, b, c, abstraction faite du signe, qu'une seule combinaison possible. Si nous désignons avec Aronhold par S l'invariant qui prend ainsi naissance, nous avons [1]

$$S = (abc)(abd)(acd)(bcd). \tag{10}$$

Ce n'est que plus tard que nous rechercherons le sens géométrique de la condition $S = 0$.

Nous pouvons aussi déduire de la forme Θ l'invariant que nous venons de trouver, car, en vertu de (4), on a

$$(abu)(abv)\,a_x\,b_x = \Theta_x^2\,u_\vartheta\,v_\vartheta,$$

et, si l'on remplace les u par c, les v par d, les x par les déterminants mineurs de c et d, on obtient de nouveau S dans le premier membre; on a, par conséquent,

$$S = (\Theta cd)^2\,c_\vartheta\,d_\vartheta, \tag{11}$$

expression qui peut encore être déduite de $\Theta'^2_x\,u^2_{\vartheta'} = (cdu)^2 c_x d_x$, en y remplaçant les x par ϑ, les u par Θ. On a par conséquent aussi

$$S = \Theta^2_{\vartheta'}\,\Theta'^2_\vartheta. \tag{12}$$

Nous pouvons déduire de là pour S une définition non symbolique. On a en effet, d'après (12),

$$S = (\Theta_1\vartheta'_1 + \Theta_2\vartheta'_2 + \Theta_3\vartheta'_3)^2(\Theta'_1\vartheta_1 + \Theta'_2\vartheta_2 + \Theta'_3\vartheta_3)^2$$

avec

$$\Theta_i\Theta_k\vartheta_m\vartheta_n\Theta'_m\Theta'_n\vartheta'_i\vartheta'_k = \frac{1}{4}\,\frac{\partial^4\Theta}{\partial x_i\,\partial x_k\,\partial u_m\,\partial u_n}\;\frac{1}{4}\,\frac{\partial^4\Theta}{\partial u_i\,\partial u_k\,\partial x_m\,\partial x_n}.$$

---

(1) C'est l'invariant déjà cité plus haut (p. 252). En effectuant le calcul, on trouve, d'après Aronhold, pour $f = \Sigma\Sigma\Sigma\, a_{ikl}\,x_i x_k x_l$,

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}S = {} & (a_{122}a_{133} - a^2_{123})^2 + (a_{222}a_{333} - a^2_{233})(a_{111}a_{133} - a^2_{113}) \\ & + (a_{223}a_{333} - a^2_{223})(a_{111}a_{122} - a^2_{112}) + (a_{222}a_{333} - a_{223}a_{233})(a_{112}a_{113} - a_{111}a_{123}) \\ & + (a_{122}a_{333} + a_{223}a_{133} - 2a_{123}a_{233})(a_{112}a_{123} - a_{113}a_{122}) \\ & + (a_{122}a_{233} + a_{133}a_{222} - 2a_{123}a_{223})(a_{113}a_{123} - a_{112}a_{133}).\end{aligned}$$

Nous obtenons donc aussi pour S la quadruple somme

$$(13)\qquad S = \frac{1}{16}\sum_{ikmn} \frac{\partial^4 \Theta}{\partial x_i \partial x_k \partial u_m \partial u_n} \frac{\partial^4 \Theta}{\partial x_m \partial x_n \partial u_i \partial u_k}.$$

Maintenant, de S dérive une forme adjointe si nous remplaçons une série de symboles telle que les symboles d par des coordonnées-lignes u; il vient, en vertu de (10) et (11),

$$(14)\qquad \begin{cases} \mathfrak{S} = (abc)(abu)(acu)(bcu) = \dfrac{1}{4}\sum \dfrac{\partial S}{\partial a_{ikh}} u_i u_k u_h \\ \quad = (\Theta c u)^2 c_\vartheta u_\vartheta, \end{cases}$$

c'est-à-dire une forme adjointe de la troisième classe et du troisième degré.

Or, une telle forme nous était donnée par le premier membre de l'équation de la cayleyenne [(1), p. 245], et, comme à raison de l'arrangement nécessaire des séries de symboles, semblablement à ce qui est arrivé pour S, il ne peut exister qu'une forme adjointe du troisième ordre, $\mathfrak{S} = 0$ nous représente l'équation de la cayleyenne. C'est ce qui est confirmé par le fait qu'à l'égard d'un réseau de coniques

$$\varkappa a_x^2 + \lambda b_x^2 + \mu c_x^2 = 0$$

la même courbe était donnée par $(abu)(acu)(bcu) = 0$ (p. 250). Si nous substituons en effet ici $a_1 a_x^2$ à a_x^2, $b_2 b_x^2$ à b_x^2, $c_3 c_x^2$ à c_x^2, a, b, c étant des symboles de la forme primitive, nous obtenons, pour le réseau des polaires de f,

$$a_1 b_2 c_3 (abu)(acu)(bcu) = 0,$$

expression dont le premier membre, à cause de la permutabilité de a, b, c, est égal à $\frac{1}{6}\mathfrak{S}$.

L'équation $\mathfrak{S} = 0$ représente donc la cayleyenne.

On peut aussi évidemment déduire à l'inverse S de $\mathfrak{S}$. Posons $\mathfrak{S} = u_s^3$; il vient

$$(15)\qquad S = a_s^3.$$

Les formations précédentes font déjà voir le sens spécial de la

forme Θ. Nous allons, à l'égard de cette dernière, démontrer d'abord deux théorèmes qui nous seront utiles par la suite. Nous observerons préalablement que d'une forme φ du $\mu^{\text{ième}}$ ordre et de la $\nu^{\text{ième}}$ classe on peut toujours déduire une nouvelle forme

$$\varphi' = \frac{1}{\mu\nu}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial u_1} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2 \partial u_2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3 \partial u_3}\right),$$

possédant la propriété de l'invariance, car, en posant symboliquement $\varphi = r_x^\mu u_\rho^\nu$, nous avons

$$\varphi' = r_\rho r_x^{\mu-1} u_\rho^{\nu-1},$$

et la même chose a lieu pour les formes produites par la continuation du même procédé :

$$\varphi'' = r_\rho^2 r_x^{\mu-2} u_\rho^{\nu-2},$$

et ainsi de suite.

En soumettant maintenant Θ à l'opération indiquée, il vient, en vertu de (4),

$$\Theta' = \Theta_\vartheta \Theta_x u_\vartheta = \frac{1}{2}(abu)[(aba)\, b_x + (abb)\, a_x],$$

expression qui s'évanouit identiquement. Donc :

La forme Θ' déduite de Θ est identiquement nulle.

Mais alors, à cause de $\Theta' = \Theta_\vartheta \Theta_x u_\vartheta$, tous les coefficients $\Theta_\vartheta, \Theta_i, \vartheta_k$ doivent s'annuler, d'où cette conséquence :

Toute expression qui renferme le facteur symbolique Θ_ϑ est identiquement nulle.

Le second théorème qui doit nous occuper relativement à Θ se rapporte à la formation

$$\begin{aligned} P = \Theta_{\vartheta'}^2 u_\vartheta^2 \Theta_x'^2 &= \frac{1}{4}\sum\sum \frac{\partial^2\Theta}{\partial x_i \partial x_k}\,\frac{\partial^2\Theta}{\partial u_i \partial u_k} \\ &= (abu)^2 a_{\vartheta'} b_{\vartheta'} \Theta_x^{2'} = (cdu)^2 c_{\vartheta'} d_{\vartheta'} \Theta_x'^2 \\ &= (abc)(abd)(cdu)^2 a_x b_x. \end{aligned}$$

Appliquons à cette expression l'identité

$$(cdu)\, b_x = (bcd)\, u_x + (bdu)\, c_x - (bcu)\, d_x;$$

il vient alors

$$P = (abc)(abd)(cdu)a_x[(bcd)u_x + (bdu)c_x - (bcu)d_x].$$

Le premier terme renferme le facteur effectif u_x; quant au second, il est identique au troisième, parce que tous deux se changent l'un en l'autre par permutation des symboles c, d. On a par suite

$$P = M u_x + 2Q,$$

expression dans laquelle

(16) $$M = (abc)(abd)(bcd)(cdu)a_x,$$

(17) $$Q = (abc)(abd)(cdu)(bdu)a_x c_x.$$

Si nous permutons dans Q les symboles a et c et que nous ajoutions l'expression de Q qui prend ainsi naissance à la précédente, il vient

$$2Q = (abc)(bdu)a_x c_x[(abd)(cdu) - (cbd)(adu)].$$

La partie qui figure entre crochets dans le second membre est, d'après une identité connue, égale à $(acd)(bdu)$, et de là résulte

$$2Q = (abc)(acd)(bdu)^2 a_x c_x,$$

ce qui se transforme en $-P$ si l'on permute b avec c; on a donc

$$P = \frac{1}{2} M u_x.$$

Permutons maintenant, dans l'expression M, a avec c et avec d, et ajoutons à M les expressions ainsi formées; nous obtenons

$$3M = (abc)(abd)(bcd)[(cdu)a_x - (adu)c_x - (cau)d_x].$$

Mais l'expression entre crochets est, d'après une identité connue, égale à $(acd)u_x$. De là résulte

(18) $$3M = (abc)(abd)(bcd)(acd)u_x = S u_x,$$

et par suite

(19) $$P = \frac{1}{6} S u_x^2,$$

ce que nous formulerons dans la proposition suivante :

La forme déduite de Θ, *savoir*

$$P = \Theta_{\vartheta'}^2 \Theta_x'^2 u_\vartheta^2 = (abc)(abd)(cdu)^2 a_x b_x,$$

a la valeur $\frac{1}{6} S u_x^2$.

Nous pouvons sans peine saisir le sens géométrique de cette formule si nous considérons que P n'est autre chose que l'invariant a_α^2 pour les deux coniques

$$a_x^2 \equiv \Theta_x^2 u_\vartheta^2 = 0 \quad \text{et} \quad u_\alpha^2 \equiv \Theta_x'^2 u_{\vartheta'}^2 = 0.$$

Ici l'on a écrit a_x^2 et u_α^2 pour la même forme Θ; mais, dans a_x^2, $\Theta = 0$ est regardé comme l'équation de la poloconique de u, dans u_α^2 comme l'équation en coordonnées-lignes de la polaire conique de x. Dans (19) se trouve donc ce théorème :

La polaire conique de x est harmoniquement inscrite à la poloconique de u lorsque x est réuni de situation avec u, et même sans cette dernière condition lorsque S *est nul.*

Nous pouvons interpréter l'équation (18) d'une manière tout à fait semblable. On reconnaît en effet, sur (16), que M n'est autre chose que l'expression $a_s^2 u_s a_x$, car nous avons (en posant $s = u_s^3$)

$$3 v_s^2 u_s = (abc)[(abv)(acv)(bcu) + (bcv)(abv)(acu) + (acv)(bcv)(abu)]$$
$$= 3(abc)(abv)(bcv)(acu),$$

ce qui se transforme en M si l'on remplace a par d, v par a, et qu'on multiplie par a_x. Par conséquent, dans (18) se trouve ce théorème dont nous avons déjà fait usage [1] :

La polaire conique d'un point x relativement à la courbe primitive est harmoniquement circonscrite à la polaire d'une

---

[1] *Voir* p. 252. La forme $H(a.b,c) = (abu)(acu)(bcu)$, déduite des coniques a_x^2 b_x^2, c_x^2, est égale à $a_1 b_2 c_3 (abu)(acu)(bcu)$, si on l'établit pour les polaires coniques des sommets du triangle des coordonnées relativement à a_x^2, et elle est, par suite, égale à $\frac{1}{6} S$, d'où le facteur $\frac{1}{2}$ dans l'équation (11), p. 252, au lieu du facteur 3 dans l'équation (18).

droite u relativement à la cayleyenne si u et x sont réunis de situation, et même sans cette condition si S *est nul.*

Les équations (18) et (19) ne sont que des cas spéciaux d'une règle plus générale dont voici l'énoncé :

Lorsque la représentation symbolique d'une forme renferme deux facteurs de S, *tels que* (abc), (abd), *et en outre les séries* c, d *réunies en un facteur déterminant symbolique, la forme est divisible par* S.

Tout produit de l'espèce citée se compose en effet d'une somme de termes de la forme

$$(abc)(abd)(cdu)\, a_i b_k c_l d_m \mathrm{E},$$

E ne renfermant plus les symboles a, b, c, d, et les quantités u désignant une autre série de symboles ou des coordonnées-lignes. Mais le terme dont il s'agit doit toujours être divisible par S du moment où il en est ainsi pour l'expression

$$\mathrm{L} = (abc)(abd)(cdu)\, a_x b_y c_z d_t = \frac{1}{2}(abc)(abd)(cdu)(a_x b_y + b_x a_y) c_z d_t.$$

Or, comme cette dernière est symétrique en a et b, elle dérive, par formation polaire, de la forme

$$\mathrm{L}' = (abc)(abd)(cdu)\, a_x b_x c_z d_t,$$

et nous avons seulement à démontrer que celle-ci renferme le facteur S. Permutons, dans L′, c, d, et ajoutons à L′ la formation ainsi obtenue. Il vient alors

$$\begin{aligned} 2\mathrm{L}' &= (abc)(abd)(cdu)\, a_x b_x (c_z d_t - d_z c_t) \\ &= (abc)(abd)(cdu)(cdv)\, a_x b_x, \end{aligned}$$

en posant $v_i = (zt)_i$. Or cette expression s'obtient au moyen de

$$\mathrm{P} = (abc)(abd)(cdu)^2 a_x b_x,$$

si l'on forme l'équation du pôle de la droite v relativement à $\mathrm{P} = 0$. Mais, comme P, suivant (18), contient le facteur S, la même chose a lieu aussi pour L′. C. Q. F. D.

Avec les formes Θ, Q, F, S, $\mathfrak{s}$, les formations les plus simples

sont épuisées, et leur examen nous permet d'étudier en détail le *faisceau syzygétique* $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$. Nous commencerons par établir pour la fonction composée $\varkappa f + \lambda \Delta$ les formes qui nous sont connues pour f (en exceptant toutefois F et Q).

A cette fin, il nous sera utile de faire usage du procédé de différentiation composé que l'on indique par la lettre δ, et à l'égard duquel nous avons démontré plus haut qu'il n'altère pas l'invariance d'une forme φ faisant partie du système qui appartient à f (t. I, p. 334). Ce procédé consiste ici à différentier φ suivant les coefficients a_{ikh} de f, à les multiplier par les coefficients correspondants α_{ikh} de Δ et à ajouter les produits, c'est-à-dire qu'*il est défini par l'équation*

$$\delta\varphi = \sum \frac{\partial\varphi}{\partial a_{ikh}} \alpha_{ikh},$$

dans laquelle le signe sommatoire se rapporte à toutes les combinaisons des indices i, k, h. Si nous désignons maintenant par $\varphi_{\varkappa\lambda}$ la forme qui est par rapport à $\varkappa f + \lambda \Delta$ ce que φ est par rapport à f, nous obtiendrons, d'après le théorème de Taylor, pour $\varphi_{\varkappa\lambda}$, une série procédant suivant les puissances de $\varkappa$, λ, et dont les coefficients φ_i se déduiront les uns des autres par différentiation. Mais nous apprendrons plus tard à remplacer la différentiation simple par le procédé δ, et nous avons d'abord à rechercher l'influence du procédé δ sur f, Δ, Θ, S, s (¹).

Or on a, par définition,

$$(20) \qquad \delta f = \Delta.$$

Pour fixer l'influence du procédé δ sur une expression *symbolique* plus compliquée φ, remarquons que toute série de symboles renfermés dans φ indique la présence linéaire et homogène des coefficients a_{ikh} dans φ. On voit par là que le procédé de différentiation conduit à la somme des expressions qui prennent naissance si l'on différentie seulement suivant une telle série; on a

$$\delta\varphi(a, b, c \ldots) = \sum \frac{\partial\varphi}{\partial a_{ikh}} \alpha_{ikh} + \sum \frac{\partial\varphi}{\partial b_{ikh}} \alpha_{ikh} + \sum \frac{\partial\varphi}{\partial c_{ikh}} \alpha_{ikh} + \ldots.$$

(¹) Les deux procédés se distinguent par la circonstance que, dans le premier, les α_{ikh} sont considérés comme indépendants des a_{ikh}, ce qui n'a pas lieu dans le procédé δ. Ce dernier a été introduit par Aronhold.

Donc on déduit d'une forme φ la forme $\delta\varphi$ en remplaçant successivement dans la forme symbolique de φ chaque série de symboles par une série de symboles de Δ et en formant la somme des expressions obtenues.

Pour introduire au lieu des symboles α de

$$(21) \qquad \Delta = (abc)^2 a_x b_x c_x = \alpha_x^3 = \beta_x^3$$

les symboles a, b, c de f, il est nécessaire d'observer que, par suite de la permutabilité de a, b, c dans Δ, on a

$$\alpha_i \alpha_k \alpha_h = \frac{1}{6} \frac{\partial \Delta}{\partial x_i \partial x_k \partial x_h} = \frac{1}{6} (abc)^2 \Sigma a_i b_k c_h$$
$$= (abc)^2 a_i b_k c_h.$$

Si donc dans un produit symbolique se rencontre le symbole α, l'introduction des symboles a, b, c de la forme primitive se fait en remplaçant α qui entre trois fois, une fois par a, une fois par b, une fois par c, et en multipliant par $(abc)^2$.

L'application du procédé δ à Δ donne donc d'abord, suivant la première règle,

$$\delta\Delta = \delta[(abc)^2 a_x b_x c_x] = 3(ab\alpha)^2 a_x b_x \alpha_x,$$

et ensuite, par application de la seconde règle et substitution des symboles c, d, e de f à α,

$$\delta\Delta = 3(abc)(abd) a_x b_x e_x (cde)^2.$$

Le second membre s'obtient au moyen de P, à la condition de poser $u_i = e_i$ et de multiplier par e_x; on a pour cette raison, d'après l'équation (19), puisque $e_x^3 = f$,

$$(22) \qquad \delta\Delta = 3(ab\alpha)^2 a_x b_x \alpha_x = \frac{1}{2} \mathrm{S} f.$$

L'application du procédé δ au covariant Δ ramène donc à la forme f multipliée par $\frac{1}{2}$ S.

Il résulte de là, si l'on tient compte de (20), que l'application même réitérée du procédé δ à Δ ne peut conduire à aucun covariant nouveau. Tous les covariants qui ont cette origine sont

nécessairement des fonctions linéaires de f et Δ, et leurs coefficients sont des invariants produits par l'application réitérée du procédé δ à S.

Maintenant, l'expression $(ab\alpha)^2 a_x b_x \alpha_x$ n'est autre chose que l'unique invariant simultané des polaires coniques de x relativement à $f=0$ et $\Delta=0$. L'équation (22) comprend donc ce théorème :

Si x est un point d'une courbe du troisième ordre, on peut circonscrire à la polaire conique de x relativement à cette courbe des triangles qui sont triangles polaires de x relativement à la hessienne et inscrire à cette dernière des triangles qui sont triangles polaires de la première. Il en est ainsi pour tout point x si l'invariant S *s'annule.*

Nous insisterons encore sur le cas de $S=0$. D'après les développements donnés précédemment, il existe pour les coniques du réseau $\alpha_y^2 \alpha_x = 0$ un nombre doublement infini de coniques qui présentent à leur égard la relation énoncée; ces dernières forment le réseau tangentiel conjugué et peuvent par conséquent se représenter sous la forme $\varkappa u_\beta^2 + \lambda u_\gamma^2 + \mu u_\delta^2 = 0$; $u_\beta^2 = 0$, $u_\gamma^2 = 0$, $u_\delta^2 = 0$ étant trois courbes quelconques du réseau tangentiel. D'autre part, les coniques $\Theta \equiv (abu)^2 a_x b_x = 0$ dépendent en général quadratiquement de deux paramètres, tandis que leur équation en coordonnées-points $a_y^2 a_x = 0$ renferme ces paramètres linéairement. Si maintenant $S=0$, la présence de x_1, x_2, x_3 au second degré ne sera qu'apparente; mais cette dernière circonstance ne sera possible que si toutes les coniques du réseau tangentiel ont un triangle polaire commun ([1]), car elles peuvent se représenter sous

---

([1]) Cette démonstration s'établit plus exactement comme il suit : Nous pouvons énoncer la proposition du texte en disant qu'*il n'existe point d'autre réseau de coniques* C_2, *dans lequel une seule courbe passe par deux points quelconques, et deux droites quelconques sont également tangentes à une courbe unique, que celui dans lequel toutes les courbes* C_2 *ont un triangle polaire commun.* Démonstration : Toutes les coniques C_2 passant par un point x forment un faisceau de courbes qui ont, en toute hypothèse, un triangle polaire commun ; une droite quelconque u est touchée par deux courbes de ce faisceau, ayant même triangle polaire commun. Leurs équations en coordonnées-lignes étant $\varphi=0$, $\psi=0$, toutes les autres courbes C_2 du réseau qui touchent la ligne u doivent être représentables sous la forme $\varphi+\lambda\psi=0$, c'est-à-dire qu'elles ont aussi en commun le même triangle polaire. Comme d'ailleurs u et x ont été pris arbitrairement, notre proposition est démontrée.

la forme

$$\varkappa u_1^2 + \lambda u_2^2 + \mu u_3^2 = 0,$$

et en coordonnées-points, pour $\varkappa\lambda = m$, $\lambda\mu = k$, $\mu\varkappa = l$,

$$k y_1^2 + l y_2^2 + m y_3^2 = 0,$$

k, l, m étant trois nouveaux paramètres entrant également linéairement. Mais dans ce cas le réseau conjugué $\alpha_y^2 \alpha_x = 0$ du réseau tangentiel $\Theta = 0$ se compose des coniques qui passent par les sommets du triangle polaire commun au réseau tangentiel; ces dernières ont donc trois points communs, c'est-à-dire que la courbe $\Delta \equiv \alpha_y^3 = 0$ a trois points doubles ou, ce qui revient au même, se compose de trois droites (p. 103). Comme d'ailleurs la hessienne du réseau tangentiel $\Theta = 0$ est en même temps la cayleyenne du réseau conjugué (p. 251), nous avons ce théorème:

La condition $S = 0$ *exprime que la hessienne de* $f = 0$ *se décompose en trois droites. La cayleyenne se compose alors des trois points doubles de la hessienne, et le triangle formé par ces derniers est triangle polaire relativement à toutes les polaires coniques de la courbe primitive.* Il résulte au surplus de la dernière partie de cette proposition qu'*en cas d'évanouissement de* S *l'équation de la courbe primitive peut être mise sous la forme*

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0.$$

Dans ce cas, le réseau tangentiel des polaires coniques de la cayleyenne est conjugué au réseau de celles de la courbe primitive, puisque toutes les courbes du premier sont touchées par les côtés du triangle précité. Il en résulte de nouveau, nécessairement, que l'expression $M = a_s^2 u_s a_x$ est à un facteur numérique près égale au produit $S u_x$, comme nous l'avons trouvé dans l'équation (18). A l'inverse, nous aurions pu tirer de la dernière équation le sens de l'évanouissement de l'équation (18) et la nécessité de la relation (22).

Un théorème analogue à celui relatif aux formations dérivées de f par le procédé δ a lieu pour les formations déduites de Θ par le même procédé. De Θ se tire d'abord la forme

$$(23) \qquad \mathfrak{H} = \frac{1}{2}\delta\Theta = \frac{1}{2}\delta[(abu)^2 a_x b_x] = (a\alpha u)^2 a_x \alpha_x.$$

Comme on le voit immédiatement, $\mathfrak{H} = 0$ *est l'équation d'une conique dont les tangentes u sont rencontrées par les polaires coniques du point x relativement à f = o et Δ = o en des couples de points harmoniques* (t. I, p. 350).

Si maintenant nous appliquons de nouveau à $\mathfrak{H}$ le procédé δ, nous obtenons deux termes dont l'un est formé par application de l'opération aux coefficients de f remplacés par les symboles a, l'autre dérive de l'application de l'opération aux coefficients de Δ remplacés par les α. La première partie donne une nouvelle forme mixte

$$(24)\qquad \mathfrak{K} = (\alpha\beta u)^2 \alpha_x \beta_x.$$

La seconde partie ramène de nouveau à Θ en vertu de (22), car cette dernière équation exprime que

$$(25)\qquad \delta\alpha_{ikh} = \frac{1}{2}\,\mathrm{S}\,a_{ikh} = \frac{1}{2}\,\mathrm{S}\,b_{ikh}.$$

Cette seconde partie devient donc $\frac{1}{2}\,\mathrm{S}\,(abu)^2 a_x b_x$, et il en résulte

$$(26)\qquad \delta\mathfrak{H} = \mathfrak{K} + \frac{1}{2}\,\mathrm{S}\Theta.$$

Mais avec la forme $\mathfrak{K}$ cette série de formations est terminée, car à l'aide des mêmes considérations on obtient immédiatement

$$(27)\qquad \delta\mathfrak{K} = \mathrm{S}(a\alpha u)^2 a_x \alpha_x = \mathrm{S}\mathfrak{H}.$$

Les formes Θ, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$ *forment donc comme* f *et* Δ, *vis-à-vis du procédé* δ, *un système fermé.*

Deux groupes limités d'une façon semblable proviennent des formes S et $\mathfrak{S}$. Nous trouvons d'abord

$$\delta\mathrm{S} = \delta[(abc)\,(abd)\,(acd)\,(bcd)] = 4(abc)\,(ab\alpha)\,(ac\alpha)\,(bc\alpha),$$

$$\delta\mathfrak{S} = \delta[(abc)\,(abu)\,(acu)\,(bcu)] = 3(ab\alpha)\,(abu)\,(a\alpha u)\,(b\alpha u).$$

En désignant les deux nouvelles formes, abstraction faite des

facteurs numériques, par T et $\mathfrak{T}$, nous avons donc

$$(28)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{4}\,\delta S = T = (abc)(ab\alpha)(ac\alpha)(bc\alpha), \\ \dfrac{1}{3}\,\delta \mathfrak{S} = \mathfrak{T} = (ab\alpha)(abu)(a\alpha u)(b\alpha u). \end{cases}$$

Pour apprendre à connaître les propriétés de T et $\mathfrak{T}$, donnons d'abord leurs expressions par rapport aux symboles originaires de f, et cela d'après notre règle précédente sur le remplacement des symboles de Δ par ceux de f. Nous remplacerons donc les α divisément par d, e, f et nous multiplierons par $(def)^2$. Il vient alors

$$(29)\qquad \begin{cases} T = (abc)(abd)(ace)(bcf)(def)^2, \\ \mathfrak{T} = (abd)(abu)(aeu)(bfu)(def)^2. \end{cases}$$

Nous observerons que $\mathfrak{T}$ se forme de T comme $\mathfrak{S}$ de S par substitution des coordonnées-lignes u aux quantités c, ce qui est important pour le calcul de δT ; et si l'on forme l'expression

$$\sum \frac{\partial T}{\partial a_{ikh}}\, u_i u_k u_h,$$

on obtient en tout six termes qui tirent leur origine de la substitution successive de u à chacune des six séries de symboles qui interviennent dans T. Maintenant, a, b, c entrent dans T symétriquement, car T ne varie pas si l'on permute a et b, à la condition de permuter simultanément e et f. Les séries de symboles a, b, c fournissent donc trois termes égaux qui, d'après (29), sont tous égaux à $\mathfrak{T}$. De même les séries d, e, f fournissent trois termes égaux, car elles entrent aussi symétriquement, puisque T ne varie pas si l'on permute par exemple d et e et simultanément aussi b et c. Si donc nous désignons par $\mathfrak{T}'$ les trois termes provenant des séries d, e, f, nous aurons

$$\sum \frac{\partial T}{\partial a_{ikh}}\, u_i u_k u_h = 3(\mathfrak{T} + \mathfrak{T}').$$

Nous allons d'ailleurs montrer que $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$ sont égaux. On a

$$\mathfrak{T}' = (abc)(abd)(ace)(bcu)(deu)^2.$$

et, si nous écrivons, dans $\mathfrak{G}$, c pour le symbole f et que nous permutions a avec d,

$$\mathfrak{G} = (abd)(bdu)(deu)(bcu)(ace)^2.$$

La différence des deux expressions donne, par conséquent,

$$\mathfrak{G}' - \mathfrak{G} = (abd)(ace)(bcu)(deu)[(abc)(deu) - (ace)(bdu)].$$

Mais les deux termes entre crochets sont, d'après une identité connue, égaux à

$$(dau)(ebc) + (dcu)(abe).$$

Si l'on effectue la substitution, il résulte d'un théorème précédent que $\mathfrak{G}' - \mathfrak{G}$ est divisible par S, car la première partie renferme $(ebc)(ace)$ et a, b encore réunis, l'autre renferme $(abe)(abd)$ et d, e encore réunis. On a par conséquent

$$\mathfrak{G}' - \mathfrak{G} = \mathrm{S}\mathfrak{X}.$$

Mais le facteur $\mathfrak{X}$ ne peut plus, en dehors des trois séries u, renfermer qu'une seule série de symboles de f, et, comme on n'en peut tirer aucun facteur déterminant symbolique qui ne soit pas nul, il en résulte

$$\mathfrak{G}' - \mathfrak{G} = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Entre l'invariant T *et la forme adjointe* $\mathfrak{G}$ *existent donc les relations*

$$(30) \qquad \begin{cases} \mathfrak{G} = \frac{1}{6} \sum \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial a_{ikh}} u_i u_k u_h = u_i^3, \\ \mathrm{T} = \alpha_i^3. \end{cases}$$

Or une courbe du troisième ordre ne peut avoir qu'*un* invariant absolu, car on peut dans son équation détruire toutes les constantes, à l'exception d'une, par transformation linéaire. Il n'existe donc que deux invariants S et T, et le procédé δ appliqué à T doit ramener à S. Pour former d'une manière effective δT il suffit, en vertu de (30), de remplacer dans $6\mathfrak{G}$ ou $6\mathfrak{G}'$ les quantités u par les symboles α de Δ. Nous choisirons $\mathfrak{G}'$ et nous obtiendrons

$$\delta \mathrm{T} = 6(abc)(abd)(ace)(bc\alpha)(de\alpha)^2.$$

Mais, d'après (25), on a

$$\frac{1}{3}\delta\alpha_{ikh} = (de\alpha)^2 d_i e_k \alpha_h = \frac{S}{6} a_i a_k a_h = \frac{S}{6} d_i d_k d_h ;$$

nous avons donc dans δT à écrire toujours d à la place de d, e, α et $\frac{S}{6}$ à la place de $(de\alpha)^2$, c'est-à-dire que l'on a

$$(31) \qquad \delta T = (abc)(abd)(acd)(bcd)\,S = S^2.$$

Les invariants S *et* T *forment donc comme* f *et* Δ *ou* Θ, $\mathfrak{H}$ *et* $\mathfrak{K}$, *vis-à-vis du procédé* δ, *un système fermé.*

Nous reconnaîtrons plus tard le sens géométrique de la condition $T = 0$, lorsque nous formerons $\Delta_{\varkappa\lambda}$; celui de la courbe $\mathfrak{S} = 0$ s'obtient par la considération suivante. Nous partirons de la forme de $\mathfrak{S}$ désignée par $\mathfrak{S}'$:

$$\mathfrak{S} = (abc)(abd)(ace)(bcu)(deu)^2.$$

Cette dernière peut être composée avec les coefficients de Θ et s, car, puisque

$$\Theta = (dcu)^2 d_x e_x = \Theta_x^2 u_\vartheta^2,$$

il en résulte, si l'on différentie suivant les x, que l'on multiplie par les y, puis qu'on ajoute, et cela à cause de la permutabilité de d et e:

$$\Theta_x \Theta_y u_\vartheta^2 = (deu)^2 d_x e_y.$$

Si maintenant on remplace dans les deux membres les x par les déterminants des a, b, les y par les déterminants des a, c, et qu'on multiplie par $(abc)(bcu)$, on obtient dans le second membre la forme précédente de $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}$, et il vient par suite

$$\mathfrak{S} = (\Theta ab)(\Theta ac)(abc)(bcu)\,u_\vartheta^2.$$

On a d'ailleurs, d'après (14), en désignant par s_{ikh} les coefficients de s,

$$v_s^2 u_s = (abc)(abv)(acv)(bcu),$$

et par suite, en remplaçant v par Θ et multipliant par u_ϑ^2,

$$(32) \qquad \mathfrak{S} = u_t^5 = \Theta_s^2 u_s u_\vartheta^2.$$

Or, dans le second membre figure l'invariant simultané unique p_σ^2 de la poloconique $p_x^2 \equiv \Theta = 0$ de u et de la polaire conique $\nu_\sigma^2 \equiv \nu_s^2 u_s = 0$ de u relativement à $\mathfrak{S} = 0$.

La courbe de troisième classe $\mathfrak{T} = 0$ *est donc enveloppée par les lignes u dont la courbe polaire relativement à* $\mathfrak{S} = 0$ *est harmoniquement inscrite à leur poloconique relativement à* $f = 0$.

La forme de $\mathfrak{T}$ donnée dans (32) nous conduit aussi à l'expression de $\delta\mathfrak{T}$; mais nous ne voulons pas effectuer le calcul qui s'y rapporte parce que nous ne ferons pas usage par la suite de la forme $\mathfrak{T}_{\varkappa\lambda}$. Donnons seulement les équations auxiliaires qu'on y emploie afin de montrer comment les relations qu'elles contiennent peuvent être formulées géométriquement. Eu égard aux valeurs de $\delta\Theta$ et $\delta\mathfrak{S}$ dans (23) et (28), il résulte de (32)

$$(33) \qquad \delta\mathfrak{T} = 2\mathfrak{H}_s^2 u_s u_\eta^2 + 3\Theta_t^2 u_t u_\vartheta^2.$$

et, par des transformations ultérieures de cette expression, on démontre les trois équations suivantes (¹) :

$$(34) \qquad \mathfrak{H} = -\frac{1}{6} S u_x^2 + u_s^2 d_s d_x^2,$$

$$(35) \qquad \mathfrak{H}_s^2 u_s u_\eta^2 = \frac{1}{6} S\mathfrak{S},$$

$$(36) \qquad \Theta_t^2 u_t u_\vartheta^2 = \frac{1}{6} S\mathfrak{S},$$

lesquelles donnent lieu aux théorèmes que voici :

Si u est une droite rencontrant les premières polaires de x relativement à f et Δ *en des couples de points harmoniques, la polaire linéaire de x relativement à* $f = 0$ *passe par le pôle de u relativement à* $\mathfrak{S} = 0$ *lorsque x et u sont réunis de situation, et indépendamment de cette circonstance si* S *est nul.*

La courbe du deuxième ordre qui est liée à une ligne u par l'équation $\mathfrak{H} = 0$ *de la manière connue est harmoniquement circonscrite à la polaire de u relativement à la cayleyenne lorsque u est une tangente de cette dernière courbe, et il en est ainsi pour toute ligne u si* S *est nul.*

(¹) *Voir* CLEBSCH et GORDAN, *Math. Annalen*, t. VI.

La cayleyenne est aussi enveloppée par les lignes u dont la polaire conique relativement à $\mathfrak{S} = 0$ *et la poloconique sont harmoniquement inscrites et circonscrites. Le fait a lieu pour toute ligne u en cas d'évanouissement de f.* Là se trouve, d'après la définition de $\mathfrak{S}$ par (32), une certaine réciprocité entre les courbes $\mathfrak{s} = 0$ et $\mathfrak{S} = 0$.

Si l'on réunit enfin les résultats donnés dans (33), (35) et (36), on obtient

$$(37) \qquad \delta\mathfrak{S} = \frac{5}{6} S \mathfrak{s}.$$

Les formes $\mathfrak{s}$ *et* $\mathfrak{S}$ *forment donc, relativement au procédé* δ, *un système fermé de même que f et* Δ. Nous verrons plus tard comment le système $\varkappa\mathfrak{s} + \lambda\mathfrak{S} = 0$ est aussi opposé géométriquement au faisceau $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$; il compose précisément l'ensemble des courbes de troisième classe qui ont les neuf droites harmoniques pour tangentes de rebroussement communes.

Dans les formules relatives à $\delta\Delta$, $\delta\Theta$, $\delta\mathfrak{H}$, $\delta\mathfrak{K}$, $\delta\mathfrak{s}$, δS, $\delta\mathfrak{S}$, δT nous avons maintenant les matériaux nécessaires pour l'établissement de ces formes par rapport à la fonction composée $\varkappa f + \lambda\Delta$.

Nous pouvons écrire la forme $\Theta_{\varkappa\lambda}$ sans autre explication; on a

$$(38)\left\{\begin{aligned} \Theta_{\varkappa\lambda} &= (abu)^2 a_x b_x \varkappa^2 + [(\alpha bu)^2 \alpha_x b_x + (a\alpha u)^2 a_x \alpha_x]\varkappa\lambda + (\alpha\beta u)^2 \alpha_x \beta_x \lambda^2 \\ &= \varkappa^2\Theta + 2\varkappa\lambda\mathfrak{H} + \lambda^2\mathfrak{K}. \end{aligned}\right.$$

Pour $\Delta_{\varkappa\lambda}$, nous trouvons d'abord le développement

$$(39) \qquad \Delta_{\varkappa\lambda} = \Delta\varkappa^3 + 3\Delta_1\varkappa^2\lambda + 3\Delta_2\varkappa\lambda^2 + \Delta_3\lambda^3,$$

égalité où, d'après le théorème de Taylor,

$$\Delta_1 = (ab\alpha)^2 a_x b_x \alpha_x, \quad \Delta_2 = (a\alpha\beta)^2 a_x \alpha_x \beta_x, \quad \Delta_3 = (\alpha\beta\gamma)^2 \alpha_x \beta_x \gamma_x.$$

Chacune de ces formes dérive de la précédente par un procédé de différentiation dans lequel les α_{ikh} sont considérés comme indépendants des a_{ikh}, tandis que le procédé δ s'étend toujours même aux coefficients de f contenus dans les α_{ikh}. Si donc nous indiquons par l'indice α ajouté à la lettre δ que le procédé δ doit s'étendre uniquement aux coefficients de la forme primitive renfermés dans

les α_{ikh}, nous avons

$$\delta\Delta = 3\Delta_1,\quad \delta\Delta_1 = 2\Delta_2 + \delta_\alpha\Delta_1,\quad \delta\Delta_2 = \Delta_3 + \delta_\alpha\Delta_2.$$

Or on a, d'après l'équation (25), $\delta\alpha_{ikh} = \frac{1}{2}\,\mathrm{S}a_{ikh}$, d'où aussi

$$\delta_\alpha\Delta_1 = \frac{1}{2}\,\mathrm{S}\Delta,\quad \delta_\alpha\Delta_2 = \mathrm{S}\Delta_1,$$

et nous pouvons, en conséquence, calculer les quantités Δ_i au moyen des équations précédentes. Il vient

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{1}{3}\delta\Delta = \frac{1}{6}\,\mathrm{S}f,\\ \Delta_2 &= \frac{1}{12}\delta(\mathrm{S}f) - \frac{1}{4}\,\mathrm{S}\Delta = \frac{1}{3}\,\mathrm{T}f - \frac{1}{6}\,\mathrm{S}\Delta,\\ \Delta_3 &= \frac{1}{3}\,\delta\left(\mathrm{T}f - \frac{1}{2}\mathrm{S}\Delta\right) - \frac{\mathrm{S}^2}{6}f = \frac{1}{12}\mathrm{S}^2 f - \frac{1}{3}\,\mathrm{T}\Delta.\end{aligned}\right.$$

En substituant les valeurs trouvées dans la formule relative à $\Delta_{\varkappa\lambda}$ et ordonnant suivant f et Δ, il vient (¹)

$$(41)\quad \Delta_{\varkappa\lambda} = \left(\varkappa^3 - \frac{\mathrm{S}}{2}\varkappa\lambda^2 - \frac{\mathrm{T}}{3}\lambda^3\right)\Delta + \left(\frac{\mathrm{S}}{2}\,\varkappa^2\lambda + \mathrm{T}\varkappa\lambda^2 + \frac{\mathrm{S}^2}{12}\,\lambda^3\right)f.$$

On voit immédiatement que les considérations établies pour les expressions Δ_i conservent leur valeur pour les coefficients de tout développement

$$\varphi_{\varkappa\lambda} = \varkappa^n\varphi + n\varkappa^{n-1}\lambda\varphi_1 + \frac{n(n-1)}{1.2}\varkappa^{n-2}\lambda^2\varphi_2 + \ldots + \lambda^n\varphi_n,$$

$\varphi_{\varkappa\lambda}$ désignant la forme φ adjointe à f établie relativement à $\varkappa f + \lambda\Delta$.

A l'égard des coefficients φ_i existe constamment le système d'équations

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned} &\delta\varphi = n\varphi_1, && \delta\varphi_1 = (n-1)\varphi_2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{S}\varphi,\\ &\delta\varphi_2 = (n-2)\varphi_3 + \frac{1}{2}\,\mathrm{S}.2\varphi_1, && \delta\varphi_3 = (n-3)\varphi_4 + \frac{1}{2}\,\mathrm{S}.3\varphi_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, && \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &\delta\varphi_{n-1} = \varphi_n + \frac{1}{2}\,\mathrm{S}(n-1)\varphi_{n-2}, && \delta\varphi_n = \frac{1}{2}\,\mathrm{S}.n\varphi_{n-1}.\end{aligned}\right.$$

(¹) Cette formule contient encore le théorème de Hesse, p. 230.

En employant ces équations au calcul des coefficients $\mathfrak{S}_i$ dans

$$\mathfrak{S}_{x\lambda} = \mathfrak{S}x^3 + 3\mathfrak{S}_1 x^2\lambda + 3\mathfrak{S}_2 x\lambda^2 + \mathfrak{S}_3\lambda^3,$$

nous obtenons

$$(43)\quad \begin{cases} \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{C}, \quad \mathfrak{S}_2 = \frac{1}{6}S\mathfrak{S}, \quad \mathfrak{S}_3 = \frac{2}{3}T\mathfrak{S} - \frac{1}{2}S\mathfrak{C}, \\ \mathfrak{S}_{x\lambda} = \left(x^3 + \frac{1}{2}Sx\lambda^2 + \frac{2}{3}T\lambda^3\right)\mathfrak{S} + \left(3x^2\lambda - \frac{1}{2}S\lambda^3\right)\mathfrak{C}. \end{cases}$$

Les équations $\Delta_3 = 0$ et $\mathfrak{S}_3 = 0$ donnent respectivement la hessienne et la cayleyenne de $\Delta = 0$; nous avons donc, en vertu des expressions trouvées pour Δ_3 et $\mathfrak{S}_3$, les théorèmes suivants :

Si S *s'évanouit, la hessienne de* Δ *se confond avec* Δ; *en d'autres termes,* $\Delta = 0$ *se compose de trois lignes droites, et la cayleyenne de* $\Delta = 0$ *se confond avec celle de* $f = 0$; *elle se compose de trois points, comme nous l'avons déjà trouvé ci-dessus* (p. 292 et suiv.).

Si l'invariant T *s'évanouit, la hessienne de la hessienne se confond avec la courbe primitive* $f = 0$, *et la cayleyenne de la hessienne se confond avec* $\mathfrak{C} = 0$.

Dans la formule relative à $\Delta_{x\lambda}$, on remarque que les coefficients de f et Δ sont les dérivées partielles prises suivant x et λ de la forme binaire biquadratique $G(x, \lambda) = G$, qui a l'expression

$$(44)\quad G = x^4 - Sx^2\lambda^2 - \frac{4}{3}Tx\lambda^3 - \frac{1}{12}S^2\lambda^4 \quad (^1).$$

Il vient en effet

$$(45)\quad \begin{cases} \frac{1}{4}\frac{\partial G}{\partial x} = G_1 = x^3 - \frac{S}{2}x\lambda^2 - \frac{T}{3}\lambda^3, \\ \frac{1}{4}\frac{\partial G}{\partial \lambda} = G_2 = -\frac{S}{2}x^2\lambda - Tx\lambda^2 - \frac{S^2}{12}\lambda^3, \end{cases}$$

et $\Delta_{x\lambda}$ prend en conséquence la forme simple

$$(46)\quad \Delta_{x\lambda} = G_1\Delta - G_2 f.$$

(1) L'équation $G = 0$ est donc l'équation précédemment représentée (p. 231) par $xL - \lambda K = 0$.

Nous pouvons utiliser cette formule pour établir assez simplement les formations $S_{\varkappa\lambda}$, $T_{\varkappa\lambda}$, ... Il nous suffit d'étudier l'influence du procédé δ sur une forme $\varphi_{\varkappa\lambda}$ lorsque, au lieu de se rapporter aux coefficients de f et de Δ, il se rapporte à ceux de $\varkappa f + \lambda\Delta$ et $\Delta_{\varkappa\lambda}$. Ces derniers, d'après (46), étant donnés par

$$G_1 \alpha_{ikh} - G_2 a_{ikh},$$

on obtient de cette manière la formation

$$(47)\quad \left\{ \begin{aligned} (\delta\varphi)_{\varkappa\lambda} &= \sum \frac{\partial \varphi_{\varkappa\lambda}}{\partial(\varkappa a_{ikh} + \lambda\alpha_{ikh})} (G_1 \alpha_{ikh} - G_2 a_{ikh}) \\ &= G_1 \frac{\partial \varphi_{\varkappa\lambda}}{\partial \lambda} - G_2 \frac{\partial \varphi_{\varkappa\lambda}}{\partial \varkappa}. \end{aligned} \right.$$

Si donc φ est une forme dérivée de f, la forme $(\delta\varphi)_{\varkappa\lambda}$ établie pour la forme composée $\varkappa f + \lambda\Delta$ est égale au déterminant fonctionnel de G *et $\varphi_{\varkappa\lambda}$, divisé par* 4.

A l'aide de ce théorème nous tirerons de (46) $S_{\varkappa\lambda}$, en observant que $\delta\Delta$ est égal à $\frac{S}{2}f$; il vient ainsi

$$\frac{1}{2} S_{\varkappa\lambda}(\varkappa f + \lambda\Delta) = (\delta\Delta)_{\varkappa\lambda} = G_1\left(\frac{\partial G_1}{\partial\lambda}\Delta - \frac{\partial G_2}{\partial\lambda} f\right) - G_2\left(\frac{\partial G_1}{\partial\varkappa}\Delta - \frac{\partial G_2}{\partial\varkappa} f\right).$$

Introduisons ici les secondes dérivées de G, divisées par 12, c'est-à-dire les expressions

$$(48)\quad \left\{ \begin{aligned} G_{11} &= \frac{1}{12}\frac{\partial^2 G}{\partial\varkappa^2} = \varkappa^2 - \frac{S}{6}\lambda^2, \\ G_{12} &= \frac{1}{12}\frac{\partial^2 G}{\partial\varkappa\,\partial\lambda} = -\frac{S}{3}\varkappa\lambda - \frac{T}{3}\lambda^2, \\ G_{22} &= \frac{1}{12}\frac{\partial^2 G}{\partial\lambda^2} = -\frac{S}{6}\varkappa^2 - \frac{2T}{3}\varkappa\lambda - \frac{S^2}{12}\lambda^2. \end{aligned} \right.$$

La formule relative à $S_{\varkappa\lambda}$ devient alors en premier lieu

$$S_{\varkappa\lambda}(\varkappa f + \lambda\Delta) = 6 \begin{vmatrix} G_1 & G_{11}\Delta - G_{12} f \\ G_2 & G_{12}\Delta - G_{22} f \end{vmatrix},$$

ou, d'après les propriétés connues des fonctions homogènes,

$$S_{\varkappa\lambda}(\varkappa f + \lambda\Delta) = 6\begin{vmatrix} G_{11}\varkappa + G_{12}\lambda & G_{11}\Delta - G_{12}f \\ G_{12}\varkappa + G_{22}\lambda & G_{12}\Delta - G_{22}f \end{vmatrix}$$

$$= 6\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{12} & G_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varkappa & \lambda \\ \Delta & -f \end{vmatrix}.$$

Si donc nous divisons par $\varkappa f + \lambda\Delta$, S *devient proportionnel à la forme hessienne* H *de la forme binaire biquadratique* G :

$$(49) \quad \begin{cases} S_{\varkappa\lambda} = -6(G_{11}G_{22} - G_{12}^2) = -3H_G \\ \quad = S\varkappa^4 + 4T\varkappa^3\lambda + S^2\varkappa^2\lambda^2 + \frac{2}{3}ST\varkappa\lambda^3 + \left(\frac{2}{3}T^2 - \frac{1}{12}S^3\right)\lambda^4. \end{cases}$$

De là résulte ensuite, puisque $\delta S = 4T$,

$$(50) \qquad T_{\varkappa\lambda} = \frac{1}{4}\left(G_1 \frac{\partial S_{\varkappa\lambda}}{\partial\lambda} - G_2 \frac{\partial S_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa}\right) = -3T_G,$$

T_G désignant le covariant du sixième ordre de la forme biquadratique $G(\varkappa, \lambda)$. Nous avons d'ailleurs, à cause des relations

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{2}\delta\Theta, \quad \mathfrak{K} = \delta\mathfrak{H} - \frac{S}{2}\Theta,$$

les équations

$$(51) \qquad \mathfrak{H}_{\varkappa\lambda} = G_1(\varkappa\mathfrak{H} + \lambda\mathfrak{K}) - G_2(\varkappa\Theta + \lambda\mathfrak{H}),$$

$$(52) \qquad \mathfrak{K}_{\varkappa\lambda} = G_1\frac{\partial\mathfrak{H}_{\varkappa\lambda}}{\partial\lambda} - G_2\frac{\partial\mathfrak{H}_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa} - \frac{1}{2}S_{\varkappa\lambda}\Theta_{\varkappa\lambda}.$$

Nous pouvons écrire la dernière équation encore plus simplement en observant que $\mathfrak{K}$ prend naissance lorsque l'on établit la formation Θ à l'égard de la forme Δ, que par conséquent $\mathfrak{K}_{\varkappa\lambda}$ est la forme mixte Θ dérivée de $\Delta_{\varkappa\lambda}$. Nous trouvons alors, en vertu de (46),

$$(52a) \qquad \mathfrak{K}_{\varkappa\lambda} = G_1^2\mathfrak{K} - 2G_1G_2\mathfrak{H} + G_2^2\Theta.$$

Enfin il résulte de (43), puisque $\mathfrak{T} = \frac{1}{3}\delta\mathfrak{S}$,

$$(53) \quad \begin{cases} \mathfrak{T}_{\varkappa\lambda} = G_1\left[\left(\frac{1}{3}S\varkappa\lambda + \frac{2}{3}T\lambda^2\right)\mathfrak{S} + \left(\varkappa^2 - \frac{1}{2}S\lambda^2\right)\mathfrak{T}\right] \\ \qquad - G_2\left[\left(\varkappa^2 + \frac{1}{6}S\lambda^2\right)\mathfrak{S} + 2\varkappa\lambda\mathfrak{T}\right]. \end{cases}$$

Nous interromprons ici ces recherches algébriques pour consacrer les résultats acquis à quelques applications. Nous serons d'ailleurs, sur ce terrain, forcés pour ainsi dire d'introduire dans le cercle de nos considérations d'autres éléments de la théorie des formes ternaires cubiques, sans être pour cela complets ni même viser à l'être (¹). Démontrons seulement encore le théorème suivant, dont il sera fait usage incessamment :

La forme cubique adjointe $M = (a\alpha u)^3$ *est identiquement nulle.*

En effet, M se tire de $\Delta = \alpha_x^3 = (cde)^2 c_x d_x e_x$, en remplaçant les x par les déterminants formés des u et des a, d'où

$$M = (cde)^2 (cua)(dua)(eua).$$

Or on a, d'après une identité connue,

$$(cde)(cua) = (cue)(cda) - (cud)(cea).$$

Substituant dans M, on obtient

$$M = (cde)(dua)(eua)[(cue)(cda) - (cud)(cea)],$$

ou, puisque les deux parties se transforment l'une dans l'autre par permutation de d et e et sont par conséquent identiques,

$$M = 2(cde)(cda)(dua)(cue)(eua).$$

Cette expression renferme le facteur S, car on y trouve le facteur symbolique $(cde)(cda)$, et les symboles e, a se présentent encore réunis dans un déterminant. Mais, après séparation de S, le facteur restant de M ne doit plus renfermer de symboles, mais seulement les quantités u, et, comme avec ces dernières on ne peut former de déterminants non évanouissants, il est nécessairement nul.

C. Q. F. D.

(¹) Pour plus de détails, *voir* surtout CLEBSCH et GORDAN, *Ueber cubische ternäre Formen* (*Math. Annalen*, t. VI), ainsi que l'errata du Tome VIII, et au surplus la fin de ce Chapitre.

V. — Continuation. — Application de la théorie des formes.

Les développements qui précèdent nous donnent en substance le moyen d'établir complétement les équations dont dépend le problème le plus important qui se rencontre dans les courbes du troisième ordre : *la détermination des points d'inflexion*. Nous ferons d'ailleurs, pour la circonstance, usage de quelques nouvelles formes sur lesquelles nous reviendrons plus tard. Nous avons tiré du groupement respectif des points d'inflexion différentes conclusions sur la nature de l'équation du neuvième degré dont dépend le problème; or le groupement dont il s'agit reposait sur un théorème fondamental, à savoir que *trois points d'inflexion sont toujours en ligne droite*. Nous commencerons par donner une démonstration algébrique de cette proposition.

Si x et y sont deux points d'inflexion, on a simultanément les équations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} a_x^3 = 0, & a_y^3 = 0, \\ \alpha_x^3 = 0, & \alpha_y^3 = 0, \end{array} \right.$$

et nous avons à démontrer que, pour une valeur de λ différente de o ou de ∞, les équations $a_{x+\lambda y}^3 = 0$, $\alpha_{x+\lambda y}^3 = 0$ sont également satisfaites à la fois.

Or ces dernières équations, développées et simplifiées à l'aide de (1), donnent

$$a_x^2 a_y + \lambda a_x a_y^2 = 0, \quad \alpha_x^2 \alpha_y + \lambda \alpha_x \alpha_y^2 = 0,$$

d'où, par élimination de λ,

$$(2) \qquad a_x^2 a_y \alpha_x \alpha_y^2 - a_x a_y^2 \alpha_x^2 \alpha_y = 0.$$

Mais cette équation est en réalité une conséquence immédiate des équations (1), car elle résulte du théorème récemment démontré, d'après lequel la forme $(a\alpha u)^3$ est identiquement nulle si l'on pose $u_i = (xy)_i$.

Nous obtenons d'abord l'identité de Salmon

$$(a_x \alpha_y - a_y \alpha_x)^3 \equiv a_x \alpha_y^3 - 3 a_x^2 a_y \alpha_x \alpha_y^2 + 3 a_x a_y^2 \alpha_x^2 \alpha_y - \alpha_x^3 a_y^3 = 0,$$

et de là résulte, à cause de (1), l'équation (2). La marche de cette

démonstration permet encore de reconnaître l'exactitude du théorème suivant :

Deux courbes du troisième ordre $a_x^3 = 0$ et $\alpha_x^3 = 0$ ont leurs neuf points d'inflexion communs lorsque la forme adjointe simultanée $(a\alpha u)^3$ est identiquement nulle.

En effet, il résulte d'abord de cette dernière circonstance que deux quelconques des neuf points de rencontre sont en ligne droite avec un troisième, que par conséquent les neuf points sont groupés comme les points d'inflexion d'une courbe C_3, c'est-à-dire que par ces points passent quatre triangles; ils sont donc, d'après ce qui a été dit plus haut, des points d'inflexion pour toutes les courbes auxquelles ils appartiennent.

Du groupement des points d'inflexion nous avons conclu que dans le faisceau $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$ il existe quatre courbes se décomposant en des lignes droites, à savoir les quatre triangles inflexionnels, et nous avons trouvé les valeurs correspondantes du paramètre comme racines d'une équation du quatrième degré tirée des équations

$$\varkappa f + \lambda\Delta = 0,$$
$$\Delta_{\varkappa\lambda} \equiv Kf + L\Delta \equiv G_1\Delta - G_2 f = 0$$

par élimination de f et Δ (p. 230). Par là nous arrivons à la forme $G(\varkappa,\lambda)$, qui a été définie par l'équation (44) (p. 300). Donc :

L'équation du quatrième degré $G(\varkappa,\lambda) = 0$ détermine les quatre triangles inflexionnels, c'est-à-dire les valeurs du paramètre $\varkappa$, λ pour les courbes évanouissantes du faisceau syzygétique. Le produit des équations des quatre triangles est conséquemment donné par

$$(3) \qquad G(\Delta, -f) \equiv \Delta^4 - S\Delta^2 f^2 + \frac{4}{3}T\Delta f^3 - \frac{1}{12}S^2 f^4 = 0.$$

Étudions maintenant avec plus d'attention la forme, spécialement importante pour nous,

$$G = \varkappa^4 - S\varkappa^2\lambda^2 - \frac{4}{3}T\varkappa\lambda^3 - \frac{1}{12}S^2\lambda^4.$$

Nous formerons d'abord ses deux invariants i_G et j_G (t. I, p. 284);

le premier est

$$(4) \qquad i_G = 2\left(-\frac{1}{12}S^2 + 3\frac{1}{36}S^2\right) = 0.$$

Le premier invariant de G *est donc identiquement nul.*

Géométriquement nous pouvons, conformément à la signification de $G = 0$, concevoir $\varkappa, \lambda$ comme des coordonnées dans un faisceau de rayons dont le sommet est un point d'inflexion de $f = 0$; alors $G = 0$ est représenté par les quatre lignes inflexionnelles qui partent du point d'inflexion choisi. L'équation (4) donne par suite ce théorème :

Les quatre lignes inflexionnelles qui passent par un point d'inflexion sont équianharmoniques les unes par rapport aux autres (t. I, p. 297).

En effectuant ainsi nos constructions en un point d'inflexion, nous pouvons encore énoncer de la manière suivante la signification de l'équation

$$\Delta_{\varkappa\lambda} = G_1 \Delta - G_2 f = G_1 \varkappa' + G_2 \lambda'$$

pour $\varkappa' f + \lambda' \Delta = 0$:

Les tangentes d'inflexion des trois courbes dont la hessienne est une courbe donnée du troisième ordre $\varkappa' f + \lambda' \Delta = 0$ *forment la première polaire de la tangente d'inflexion de cette dernière relativement aux quatre lignes inflexionnelles.*

Inversement, la tangente d'inflexion de la hessienne est donnée par la polaire linéaire de la tangente d'inflexion de la courbe primitive relativement aux quatre lignes inflexionnelles.

Par là sont spécialement mises en relief, dans le faisceau considéré, les lignes dont les polaires relativement à $G = 0$ renferment un point double. Mais, puisque l'invariant i_G s'évanouit, ce sont là (t. I, p. 287) les rayons de base de G, et la première polaire d'un tel rayon se compose du rayon lui-même et de deux rayons confondus en un rayon de la forme hessienne de G. Tout triangle inflexionnel est donc sa propre hessienne et celle d'une autre courbe du troisième ordre, et les tangentes d'inflexion des courbes ainsi associées aux quatre triangles forment, dans le faisceau considéré, la forme hessienne H_G de $G(\varkappa, \lambda)$. Mais les courbes

dont la hessienne se réduit à un triangle sont, comme nous savons, caractérisées par l'évanouissement de S (p. 292), et de là résulte que :

L'invariant $S_{\varkappa\lambda}$ *de la forme composée* $\varkappa f + \lambda\Delta$ *ne diffère que par un facteur numérique de la forme hessienne de la forme binaire* $G(\varkappa, \lambda)$, *ce qui est confirmé par l'équation* (49) *de la page* 302.

Dans le faisceau considéré de tangentes d'inflexion, il existe d'ailleurs six rayons $T_G = 0$ (t. I, p. 303) qui se divisent en trois couples tels que, dans chaque couple, la première polaire d'un rayon relativement à $G = 0$ renferme l'autre rayon (il en est de même à l'égard de $H_G = 0$, ce dont nous ne nous occupons pas maintenant).

Un semblable couple de rayons est donc caractérisé, en vertu des constructions récemment données, par la circonstance que parmi les courbes correspondantes du faisceau l'une est toujours la hessienne de l'autre. Comme ce fait est exprimé par l'évanouissement de $T_{\varkappa\lambda}$ (p. 300), il s'ensuit que :

L'invariant $T_{\varkappa\lambda}$ *ne diffère que par un facteur numérique du covariant du sixième ordre* T_G *de la forme binaire* $G(\varkappa, \lambda)$, *ce qui est confirmé par l'équation* (50) *de la page* 302.

Formons enfin le second invariant de G ; ce sera

$$(5) \qquad j_G = 6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{S}{6} \\ 0 & -\frac{S}{6} & -\frac{T}{3} \\ -\frac{S}{6} & -\frac{T}{3} & -\frac{S^2}{12} \end{vmatrix} = \frac{2}{3}\left(\frac{S^3}{6} - T^2\right).$$

Si cet invariant lui-même s'évanouit, l'équation $G = 0$ a, comme on sait, trois racines égales, c'est-à-dire que trois des quatre lignes qui passent par un point d'inflexion se confondent. Or cela n'est possible que si la courbe $f = 0$ a un point double, car c'est uniquement par cette circonstance que le nombre des points d'inflexion peut être réduit, d'après les formules de Plücker. Si donc nous désignons par $-\frac{2}{3}R$ l'expression qui figure dans le second membre de (5), nous avons ce qui suit :

Le discriminant de la courbe du troisième ordre $f = 0$, c'est-à-dire la fonction qui égalée à zéro exprime la condition du point double, est donné par la formation ([1])

$$R = T^2 - \frac{1}{6} S^3. \tag{6}$$

L'invariant R possède la propriété spéciale de ne différer de l'invariant $R_{\varkappa\lambda}$ que par un facteur ; c'est un combinant du système $\varkappa f + \lambda\Delta$ (t. I, p. 259 et 281), comme la forme T_G d'une forme binaire G pour le système $\varkappa G + \lambda H_G$. Entre les formes citées en dernier lieu existe en effet la relation connue

$$T_G^2 = -\frac{1}{2}\left(H_G^3 - \frac{1}{2} i_G H_G G^2 + \frac{1}{3} j_G G^3\right),$$

laquelle, dans notre cas, en vertu de (4) et (5) et des relations $T_G = -\frac{1}{3} T_{\varkappa\lambda}$, $H_G = -\frac{1}{3} S_{\varkappa\lambda}$, se transforme en

$$R_{\varkappa\lambda} = T_{\varkappa\lambda}^2 - \frac{1}{6} S_{\varkappa\lambda}^3 = \left(T^2 - \frac{1}{6} S^3\right) G^2 = RG^2(\varkappa, \lambda). \tag{7}$$

Donc, dans le faisceau syzygétique $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$ n'est comprise aucune courbe à point double $R_{\varkappa\lambda} = 0$ *en dehors de celles qui se décomposent en trois droites* $[G(\varkappa, \lambda) = 0]$.

La résolution de l'équation $G = 0$ est très simplifiée par l'évanouissement de son premier invariant, la méthode d'Euler conduisant au but ([2]).

([1]) Le calcul effectué par Aronhold donne

$$R = \begin{vmatrix} a_{111} & a_{122} & a_{133} & a_{123} & a_{113} & a_{112} \\ a_{211} & a_{222} & a_{233} & a_{223} & a_{213} & a_{212} \\ a_{311} & a_{322} & a_{333} & a_{323} & a_{313} & a_{312} \\ \alpha_{111} & \alpha_{122} & \alpha_{133} & \alpha_{123} & \alpha_{113} & \alpha_{112} \\ \alpha_{211} & \alpha_{222} & \alpha_{233} & \alpha_{223} & \alpha_{213} & \alpha_{212} \\ \alpha_{311} & \alpha_{322} & \alpha_{333} & \alpha_{323} & \alpha_{313} & \alpha_{312} \end{vmatrix}.$$

Cette forme de déterminant de R s'obtient immédiatement, à un facteur numérique près, en éliminant les x entre les six équations $a_x^2 a_i = 0$, $\alpha_x^2 \alpha_i = 0$, qui doivent avoir lieu si x est un point double de f.

([2]) *Voir* une autre méthode de traiter l'équation biquadratique, au cas de i évanouissant, dans la *Théorie des formes binaires* de Clebsch, p. 171.

Nous posons $\frac{\varkappa}{\lambda} = x$ et nous avons ainsi l'équation

$$(8) \qquad x^4 - Sx^2 - \frac{4}{3}Tx - \frac{1}{12}S^2 = 0.$$

Faisons pour x la substitution

$$x = u + v + w,$$

d'où

$$x^2 = (u^2 + v^2 + w^2) + 2(vw + wu + uv),$$
$$x^4 = (u^2 + v^2 + w^2)^2 + 4(u^2 + v^2 + w^2)(vw + wu + uv) + 4(v^2w^2 + w^2u^2 + u^2v^2) + 8uvw(u + v + w).$$

Ces valeurs de x, x^2, x^4 étant portées dans l'équation (8), cette dernière sera satisfaite si nous posons

$$v^2w^2 + w^2u^2 + u^2v^2 = \frac{1}{12}S^2, \quad u^2 + v^2 + w^2 = \frac{1}{2}S, \quad uvw = \frac{1}{6}T.$$

Mais alors u^2, v^2, w^2 sont les racines de l'équation cubique en z

$$(9) \qquad z^3 - \frac{1}{2}Sz^2 + \frac{1}{12}S^2z - \frac{1}{36}T^2 = 0,$$

ou, après une transformation simple,

$$\left(z - \frac{S}{6}\right)^3 = \frac{T^2}{36} - \frac{S^3}{6^3} = \frac{1}{36}R.$$

Pour u^2, v^2, w^2 comme racines de cette équation, nous avons par suite les valeurs

$$u^2 = \frac{1}{6}(S + \sqrt[3]{6R}), \quad v^2 = \frac{1}{6}(S + \varepsilon\sqrt[3]{6R}), \quad w^2 = \frac{1}{6}(S + \varepsilon^2\sqrt[3]{6R}),$$

ε désignant une racine cubique imaginaire de l'unité. *Les racines de l'équation* G = 0 *sont donc données par*

$$x = \frac{\varkappa}{\lambda} = \pm\sqrt{\frac{S + \sqrt[3]{6R}}{6}} \pm \sqrt{\frac{S + \varepsilon\sqrt[3]{6R}}{6}} \pm \sqrt{\frac{S + \varepsilon^2\sqrt[3]{6R}}{6}},$$

les signes devant être choisis de telle manière que le produit uvw *des trois racines carrées soit égal à* $+\frac{1}{6}T$.

Il n'y a ainsi de possibles que *quatre* combinaisons de signes répondant aux quatre racines de $G = 0$. Parmi les racines u^2, v^2, w^2 de l'équation cubique (9), les coefficients de f étant supposés réels, deux sont imaginaires conjuguées; leur produit est donc positif, et, par suite, la troisième sera réelle et positive, pour que l'on ait $u^2v^2w^2 = \frac{1}{36}T^2$. La quantité u est donc toujours réelle, et v et w sont conjugués imaginairement. De là résulte que parmi les quatre racines de l'équation (8) deux sont toujours réelles et deux imaginaires conjuguées, et les combinaisons de signes

$$\begin{matrix} + & + & + \\ + & - & - \end{matrix}$$

donnent les deux valeurs réelles, les autres les deux valeurs imaginaires. Ou, en d'autres termes : *Le produit des trois côtés d'un triangle inflexionnel est réel pour deux de ces triangles, imaginaire pour les deux autres,* comme nous l'avons déjà trouvé par une autre voie.

Pour la détermination des points d'inflexion de $f = 0$, il serait encore nécessaire de résoudre deux des triangles inflexionnels en leurs facteurs linéaires [1]. Nous traiterons toutefois ce problème par une autre méthode, en le rattachant à un autre problème de transformation déjà signalé page 240 [2].

Si un triangle inflexionnel est pris comme triangle de coordonnées, l'équation de la courbe du troisième ordre apparaît, comme nous l'avons vu, sous la forme

$$(10) \qquad f = a(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3) + 6by_1y_2y_3 = 0.$$

Il s'agit d'abord pour nous de représenter les coefficients a, b de la forme transformée dans leur dépendance des a_{ikh} de la forme primitive sans effectuer néanmoins le calcul direct des coef-

---

(1) *Voir*, sur cette solution directe du problème, GUNDELFINGER, *Math. Annalen*, t. IV, p. 567 et suiv., ainsi que la section suivante de ces Leçons.

(2) *Voir*, pour ce qui suit, CLEBSCH, *Math. Annalen*, t. II, p. 382. Le problème a été traité autrement encore par GUNDELFINGER, *ibid.*, t. V, p. 442. *Voir* d'ailleurs l'Ouvrage de Clebsch sur la théorie des formes binaires algébriques, p. 234 et suiv., ainsi que la fin de ce Chapitre.

ficients de transformation. A cause des quatre triangles inflexionnels de la question, nous trouverions quatre valeurs pour $\frac{b}{a}$. Mais l'équation (10) ne varie pas, sauf le facteur additionnel ε ou ε^2, si nous ajoutons aux y_i, comme facteurs, des racines cubiques de l'unité, le changement ne portant en fait que sur la notation. Nous établirons donc, non pour $\frac{b}{a}$, mais pour $\frac{b^3}{a^3}$, une équation du quatrième degré qui doit au fond ramener à $G = 0$. Cela se réalise par identification des deux valeurs de l'invariant absolu [1] formées pour la forme générale et ensuite pour la forme canonique de f. Posons

$$\chi = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3,$$

$$\Delta'_\chi = 6 \begin{vmatrix} y_1 & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & y_3 \end{vmatrix} = 6 y_1 y_2 y_3,$$

en sorte que $\chi = 0$ est une courbe du faisceau syzygétique

$$(11) \qquad f \equiv a\chi + b\Delta'_\chi = 0,$$

et Δ'_χ sa forme hessienne. Cette dernière est distinguée par un accent de la formation correspondante relative aux variables primitives x_i, convention que nous observerons à l'égard de toutes les formations dans le cas de la forme canonique. Comme Δ'_χ se décompose en trois facteurs linéaires, $\chi = 0$ est caractérisé par la circonstance que son invariant S_χ s'évanouit. Nous pouvons d'ailleurs, à l'aide des formules (49) et (50), p. 302, données pour $S_{\varkappa\lambda}$ et $T_{\varkappa\lambda}$, calculer pour f les invariants S' et T', et aussi le déterminant r de la substitution, du moment que nous connaissons la forme G établie pour χ et qui sera désignée par Γ. Mais on a, d'après l'équation (46), p. 300,

$$(12) \qquad \begin{cases} \Delta' = 6 \begin{vmatrix} ay_1 & by_3 & by_2 \\ by_3 & ay_2 & by_1 \\ by_2 & by_1 & ay_3 \end{vmatrix} = (a^3 + 2b^3)\Delta'_\chi - 6ab^2\chi \\ \quad = \frac{1}{2}\frac{\partial\Gamma}{\partial a}\Delta'_\chi - \frac{1}{4}\frac{\partial\Gamma}{\partial b}\chi, \end{cases}$$

(1) *Voir* le procédé corrélatif pour les formes biquadratiques binaires, t. I, p. 308.

d'où, par identification des deux expressions,

$$\Gamma_1 = \frac{1}{4}\frac{\partial\Gamma}{\partial a} = a^3 + 2b^3, \quad \Gamma_2 = \frac{1}{4}\frac{\partial\Gamma}{\partial b} = 6ab^2,$$

et par suite

(13) $$\Gamma = a^4 + 8ab^3, \quad \Gamma_{11} = a^2, \quad \Gamma_{12} = 2b^2, \quad \Gamma_{22} = 4ab.$$

Il résulte de là, d'après (49) et (50), r désignant le déterminant de la substitution,

(14) $$\begin{cases} S' = r^4 S = -6(\Gamma_{11}\Gamma_{22} - \Gamma_{12}^2) \\ \qquad = 24b(b^3 - a^3), \end{cases}$$

(15) $$\begin{cases} T' = r^6 T = \frac{1}{4}\left(\Gamma_1 \frac{\partial S'}{\partial b} - \Gamma_2 \frac{\partial S'}{\partial a}\right) \\ \qquad = 6(8b^6 + 20a^3b^3 - a^6). \end{cases}$$

Si l'on déduit de là l'invariant absolu, *on obtient pour* $\frac{a^3}{b^3}$ *l'équation du quatrième degré*

(16) $$\frac{S^3}{T^2} = \frac{384b^3(b^3 - a^3)^3}{(8b^6 + 20a^3b^3 - a^6)^2},$$

et l'on trouve en même temps le déterminant de la transformation, si $\frac{a^3}{b^3} = \alpha$ *est connu, au moyen de l'équation*

(17) $$r^2 = \frac{S}{T}\,\frac{8b^6 + 20a^3b^3 - a^6}{4b(b^3 - a^3)} = b^2\,\frac{8 + 20\alpha - \alpha^2}{4(1 - \alpha)},$$

dans laquelle b peut être pris arbitrairement, ce qui concorde avec le fait que les coefficients de la substitution (et par conséquent r lui-même) ne sont déterminés qu'à un facteur de proportionnalité près.

Nous pouvons aisément ramener l'équation (16) à $G = 0$. Si l'on pose en effet

(18) $$\alpha = \frac{a^3}{b^3} = 1 - \frac{3}{2}S\frac{\lambda^2}{\varkappa^2},$$

elle se transforme en

$$\frac{S^3}{T^2} = \frac{16\varkappa^2\lambda^6S^3}{9\left(\varkappa^4 - S\varkappa^2\lambda^2 - \frac{1}{12}S^2\lambda^4\right)^2},$$

et il suffit d'extraire la racine dans les deux membres pour avoir de nouveau l'équation $G(x, \lambda) = 0$.

Le calcul effectif des expressions y_1, y_2, y_3 en fonction des coefficients de f exige des considérations quelque peu prolixes. Par les formes χ et Δ_χ nous sont données deux fonctions symétriques des grandeurs cherchées y_1, y_2, y_3, car de (11) et (12) résulte (puisque $\Delta' = r^3 \Delta$)

(19) $$\begin{cases} y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = \chi = \frac{1}{\Gamma}(f\Gamma_1 - r^3 \Delta b) \\ y_1 y_2 y_3 = \frac{1}{6}\Delta'_\chi = \frac{1}{6\Gamma}(f\Gamma_2 + r^3 \Delta a). \end{cases}$$

En ayant encore la valeur de la troisième fonction symétrique $y_2^3 y_3^3 + y_3^3 y_1^3 + y_1^3 y_2^3$, nous pouvons établir une équation dont les racines nous donneront les valeurs de y_1^3, y_2^3, y_3^3. Mais cette troisième fonction est du sixième ordre, et exige conséquemment l'emploi de covariants du sixième ordre qui ne se sont pas encore présentés à nous. Nous reviendrons incessamment sur ces derniers; nous observerons seulement ici que l'expression demandée se forme de Θ si l'on remplace les u_i par les grandeurs $\Delta_i = \frac{1}{3}\frac{\partial \Delta}{\partial x_i}$, c'est-à-dire que nous choisissons le covariant

$$\varphi = \Theta_x^2 \alpha_\vartheta \beta_\vartheta \alpha_x^2 \beta_x^2 = (ab\alpha)(ab\beta) a_x b_x \alpha_x^2 \beta_x^2$$
$$= -2 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \Delta_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \Delta_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & \Delta_3 \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

En effet, nous trouvons pour la forme canonique

(20) $$\begin{cases} \varphi'_\chi = -2 \begin{vmatrix} y_1 & 0 & 0 & 2y_2 y_3 \\ 0 & y_2 & 0 & 2y_3 y_1 \\ 0 & 0 & y_3 & 2y_1 y_2 \\ 2y_2 y_3 & 2y_3 y_1 & 2y_1 y_2 & 0 \end{vmatrix} \\ = 8(y_2^3 y_3^3 + y_3^3 y_1^3 + y_1^3 y_2^3). \end{cases}$$

L'équation cubique mentionnée, dont les racines sont y_1^3, y_2^3, y_3^3,

serait donc

$$(21) \qquad z^3 - \chi z^2 + \frac{1}{8}\varphi' z - \left(\frac{1}{6}\Delta'_\chi\right)^2 = 0.$$

Sa résolution est simplifiée par la circonstance que nous pouvons représenter le carré de son discriminant, c'est-à-dire le produit de différences

$$(y_1^3 - y_2^3)(y_2^3 - y_3^3)(y_3^3 - y_1^3),$$

par un covariant du neuvième ordre de f, comme nous le montrerons incessamment; on a donc une racine carrée de moins à extraire que dans une équation cubique générale ([1]).

Nous pouvons d'ailleurs trouver les expressions finales des quantités y_i^3 sans résoudre directement l'équation (21), à la condition de calculer encore la fonction symétrique $y_1^6 + y_2^6 + y_3^6$ au moyen des covariants de f. La possibilité du fait résulte de la remarque que *tout covariant de f, au cas de la forme canonique, est nécessairement une fonction entière de $y_1^3, y_2^3, y_3^3, y_1 y_2 y_3$ et symétrique en y_1^3, y_2^3, y_3^3*. Un covariant ne peut, en effet, changer si l'on ajoute à y_1, y_2, y_3 comme facteur la même racine cubique de l'unité, car la forme f n'en est point affectée. Mais tous les covariants du sixième ordre peuvent, comme on le démontre aisément pour la forme canonique, s'exprimer rationnellement en fonction de l'un d'entre eux et de f et Δ. Parmi eux on doit signaler en particulier la forme ψ définie par l'équation

$$(22) \qquad \psi = N_{n'} N'_n N_x^3 N'^3_x,$$

dans laquelle les symboles N, n se rapportent à la forme mixte, également nouvelle pour nous,

$$(23) \qquad N = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial \Delta}{\partial x_1} & u_1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} & u_2 \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} & \frac{\partial \Delta}{\partial x_3} & u_3 \end{vmatrix} = (a\alpha u)\, a_x^2 \alpha_x^2 = N_x^4 u_n.$$

([1]) *Voir* les formules (16), t. I, p. 277.

Nous reconnaîtrons dans ce covariant ψ un combinant du système $\varkappa f + \lambda\Delta$, c'est-à-dire que nous démontrerons l'équation

$$\psi_{\varkappa\lambda} = G^2\psi. \tag{24}$$

D'ailleurs, entre les formes φ et ψ existe la relation, qui sera établie incessamment (p. 319),

$$\psi = -\frac{3}{4}\varphi - \frac{1}{12}Tf^2 + \frac{1}{8}S\Delta f, \tag{25}$$

de laquelle nous pouvons déduire la forme canonique de φ. Comme en effet, d'après ce qui précède, on a, pour la forme $S=0$, $T = -6$ (¹), l'équation (25) donne, en vertu de (20),

$$\begin{aligned}\psi'_\chi &= -\frac{3}{4}\varphi'_\chi + \frac{1}{2}\chi^2 \\ &= \frac{1}{2}(y_1^3+y_2^3+y_3^3)^2 - 6(y_2^3y_3^3+y_3^3y_1^3+y_1^3y_2^3),\end{aligned}$$

et de là nous tirons la forme ψ de f à l'aide de (24); il vient

$$r^6\psi = \psi'_{a\chi+b\Delta'_\chi} = \Gamma^2\psi'_\chi,$$

d'où finalement

$$r^6\psi = \frac{1}{2}\Gamma^2[(y_1^3+y_2^3+y_3^3)^2 - 12(y_2^3y_3^3+y_3^3y_1^3+y_1^3y_2^3)]. \tag{26}$$

Ce résultat, combiné avec (19), nous donne les autres fonctions symétriques

$$\left\{\begin{aligned} y_2^3y_3^3+y_3^3y_1^3+y_1^3y_2^3 &= -\frac{r^6\psi}{6\Gamma^2} + \frac{1}{12\Gamma^2}(f\Gamma_1 - r^2\Delta b)^2, \\ y_1^6+y_2^6+y_3^6 &= \frac{r^6\psi}{3\Gamma^2} + \frac{5}{6\Gamma^2}(f\Gamma_1 - r^2\Delta b)^2. \end{aligned}\right. \tag{27}$$

En outre de ces fonctions symétriques, nous pouvons encore exprimer rationnellement (sous l'adjonction de r) le produit des différences précité, au moyen d'un covariant Ω défini (ψ étant

(¹) On tire cette valeur de (15) pour $a = 1$, $b = 0$.

égal à ψ_x^6), par

$$(28)\quad \left\{ \begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{54} \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial \Delta}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} & \frac{\partial \Delta}{\partial x_3} & \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \end{vmatrix} = (a\alpha\psi) a_x^2 \alpha_x^2 \psi_x^5 \\ &= N_x^4 \psi_n \psi_x^5 = N_{n'} N'_n N'_{n''} N_x^2 N'^2_x N''^4_x. \end{aligned} \right.$$

Ce covariant Ω *est lui-même un combinant, c'est-à-dire que l'on a* $\Omega_{\kappa\lambda} = G^3 \Omega$ (p. 321), d'où, pour la forme canonique,

$$r^9 \Omega = \Omega' = \Gamma^3 \Omega'_\chi = 6\Gamma^3 \begin{vmatrix} y_1^2 & y_2 y_3 & y_1^5 \\ y_2^2 & y_3 y_1 & y_2^5 \\ y_3^2 & y_1 y_2 & y_3^5 \end{vmatrix}$$
$$= -6\Gamma^3 (y_1^3 - y_2^3)(y_2^3 - y_3^3)(y_3^3 - y_1^3) \quad (^1).$$

Le produit des différences des cubes y_1^3, y_2^3, y_3^3, *c'est-à-dire la racine carrée du discriminant de l'équation* (21), *est donc donné par*

$$(29)\qquad (y_1^3 - y_2^3)(y_2^3 - y_3^3)(y_3^3 - y_1^3) = -\frac{r^9 \Omega}{6\Gamma^3}.$$

Il est à remarquer ici que le signe du second membre n'est pas déterminé parce que c'est r^2 et non pas r qui a été trouvé par l'équation (17). L'expression (29) renferme donc encore le facteur irrationnel

$$r = \sqrt{\frac{S}{T} \frac{8b^6 + 20a^3b^3 - a^6}{4b(b^3 - a^3)}},$$

et la valeur numérique de l'expression placée sous le radical se compose d'une quantité complètement donnée dépendant uniquement de $\frac{b^3}{a^3}$ et d'un facteur b^2 à choisir arbitrairement, lequel facteur, comme on le voit, sort de l'irrationalité.

---

(1) Le fait que le déterminant se transforme en ce produit dans le calcul se vérifie très-simplement en observant qu'il s'annule lorsque deux des quantités y deviennent égales l'une à l'autre, et qu'il doit être symétrique par rapport aux trois cubes. Pour la détermination du facteur numérique, il suffit de calculer un terme.

A l'aide des expressions trouvées, on peut maintenant représenter les cubes et le produit des deux covariants irrationnels

$$(30)\qquad \mathfrak{M} = y_1^3 + \varepsilon y_2^3 + \varepsilon^2 y_3^3,\quad \mathfrak{N} = y_1^3 + \varepsilon^2 y_2^3 + \varepsilon y_3^3.$$

Si nous considérons dans le calcul de ces cubes les relations

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0,$$

$$y_1^9 + y_2^9 + y_3^9 = (y_1^3 + y_2^3 + y_3^3)^3 - 3(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3)(y_2^3 y_3^3 + y_3^3 y_1^3 + y_1^3 y_2^3) + 3 y_1^3 y_2^3 y_3^3,$$

$$\mathfrak{M}^3 + \mathfrak{N}^3 = 2(y_1^9 + y_2^9 + y_3^9) - 3(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3)(y_2^3 y_3^3 + y_3^3 y_1^3 + y_1^3 y_2^3) + 21 y_1^3 y_2^3 y_3^3,$$

nous trouvons immédiatement, en ayant égard à (19), (27) et (29),

$$(31)\qquad \left\{\begin{aligned} 8\Gamma^3(\mathfrak{M}^3 + \mathfrak{N}^3) &= 12 r^6 \psi (f\Gamma_1 - r^2 \Delta b) \\ &\quad + 10 (f\Gamma_1 - r^2 \Delta b)^3 + (f\Gamma_2 + r^2 \Delta a)^3, \\ 8\Gamma^3(\mathfrak{M}^3 - \mathfrak{N}^3) &= 4\varepsilon(1 - \varepsilon) r^9 \Omega, \\ \Gamma^2 \mathfrak{M}\mathfrak{N} &= \frac{1}{2} r^6 \psi + \frac{3}{4}(f\Gamma_1 - r^2 \Delta b)^2. \end{aligned}\right.$$

On voit par les deux premières équations que les deux covariants suivants du neuvième ordre sont des cubes parfaits :

$$(32)\qquad \left\{\begin{aligned} 16\Gamma^3\mathfrak{M}^3 &= (f\Gamma_2 + r^2\Delta a)^3 + 10(f\Gamma_1 - r^2 \Delta b)^3 \\ &\quad + 12 r^6 \psi (f\Gamma_1 - r^2 \Delta b) + 4\varepsilon(1 - \varepsilon) r^9 \Omega, \\ 16\Gamma^3\mathfrak{N}^3 &= (f\Gamma_2 + r^2\Delta a)^3 + 10(f\Gamma_1 - r^2 \Delta b)^3 \\ &\quad + 12 r^6 \psi (f\Gamma_1 - r^2 \Delta b) + 4\varepsilon(\varepsilon - 1) r^9 \Omega. \end{aligned}\right.$$

Au moyen des équations (30), combinées avec l'équation

$$\chi = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3,$$

nous pouvons enfin calculer linéairement les trois cubes y_1^3, y_2^3, y_3^3 en $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ et χ; $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ étant les équations des côtés d'un triangle inflexionnel.

Si donc nous extrayons la racine cubique des quantités (32), *l'une des transformations cherchées pour la réduction à la forme canonique sera donnée par les racines cubiques des trois expres-*

sions suivantes :

$$(33)\quad \begin{cases} 3y_1^3 = \dfrac{1}{\Gamma}(f\Gamma_1 - r^3\Delta b) + \mathfrak{M} + \mathfrak{N}, \\ 3y_2^3 = \dfrac{1}{\Gamma}(f\Gamma_1 - r^3\Delta b) + \varepsilon^2\mathfrak{M} + \varepsilon\,\mathfrak{N}, \\ 3y_3^3 = \dfrac{1}{\Gamma}(f\Gamma_1 - r^3\Delta b) + \varepsilon\,\mathfrak{M} + \varepsilon^2\mathfrak{N}; \end{cases}$$

$\frac{a^3}{b^3}$ est actuellement une racine de l'équation biquadratique (16) ([1]); Γ est défini par (13), r par (17), $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ par (32); la forme ψ dans $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ l'est par (22) et Ω par (28).

Le problème des points d'inflexion est complétement résolu par les équations (33). Nous avions à résoudre une équation biquadratique et une équation cubique, la première caractérisée par l'évanouissement de l'invariant i, la dernière par la circonstance que le produit des différences des racines était connu.

Nous avons encore à ajouter quelques remarques sur les nouvelles formations dont nous avons fait usage et en particulier à démontrer l'identité qui existe entre φ et ψ ainsi que la propriété combinante des formes ψ et Ω. Nous y rattacherons quelques observations sur le système de courbes de troisième classe $\varkappa\mathfrak{S} + \lambda\mathfrak{T} = 0$.

Nous avons déduit le covariant ψ introduit par Brioschi de la forme mixte (23)

$$\mathrm{N} = (a\alpha u)a_x^2\alpha_x^2,$$

laquelle, égalée à zéro, associe à chaque ligne u la courbe du quatrième ordre des points x dont les polaires linéaires relativement à $f = 0$ et $\Delta = 0$ se coupent sur u. Pour exprimer d'abord ψ par les symboles a, α de f, Δ, observons que ψ, d'après (22), provient de

$$\mathrm{N}_x^3\mathrm{N}_y u_n = \frac{1}{2}(a\alpha u)a_x\alpha_x(a_x\alpha_y + a_y\alpha_x),$$

si l'on remplace y par x, u par N et qu'on multiplie par N_x^3. On a

---

([1]) On tire directement ces racines des racines $\frac{\varkappa}{\lambda}$ de l'équation (8) $G = 0$, au moyen de la substitution (18).

donc

$$\psi = \frac{1}{2}(a\alpha N)(a_n \alpha_x + a_x \alpha_n) a_x \alpha_x N_x^2.$$

Ici les deux termes se tirent encore de $N_x^2 N_y u_n$ (b, β étant écrits pour a, α), le premier en remplaçant u par a, y par les déterminants des a, α, le second en remplaçant u par α, y par les déterminants des a, α. On a par suite

$$\psi = \frac{1}{4} a_x \alpha_x b_x \beta_x [a_x(b\beta\alpha) + \alpha_x(b\beta a)][b_x(\beta a\alpha) + \beta_x(ba\alpha)].$$

Le résultat de la multiplication donne quatre termes. Mais deux se transforment l'un dans l'autre par permutation de lettres ; il vient donc

(34) $$\psi = -\frac{1}{4}(\varphi + 2\varphi' + \varphi''),$$

relation où

(35) $$\begin{cases} \varphi = (ab\beta)(ab\alpha) a_x b_x \alpha_x^2 \beta_x^2, \\ \varphi' = -(ab\beta)(\alpha\beta a) a_x \beta_x \alpha_x^2 b_x^2, \\ \varphi'' = (\alpha\beta a)(\alpha\beta b) \alpha_x \beta_x a_x^2 b_x^2. \end{cases}$$

Nous allons actuellement montrer que $2\varphi'$ peut se ramener à φ de même qu'à φ''; on pourra donc ensuite exprimer toutes les fonctions φ par ψ. On a en effet (en permutant a et b)

$$\begin{aligned} 2\varphi' &= (ab\beta) a_x b_x \alpha_x^2 \beta_x [-b_x(\alpha\beta a) + a_x(\alpha\beta b)] \\ &= (ab\beta) a_x b_x \alpha_x^2 \beta_x [\ \ \beta_x(ab\alpha) - \alpha_x(ab\beta)] \\ &= \varphi - \Delta(ab\beta)^2 a_x b_x \beta_x \\ &= \varphi - \frac{1}{6} S\Delta f, \end{aligned}$$

d'après l'équation (22), (p. 290).

Mais on a aussi (en permutant α avec β)

$$\begin{aligned} 2\varphi' &= (\alpha\beta a) \alpha_x \beta_x a_x b_x^2 [-\alpha_x(ab\beta) + \beta_x(ab\alpha)] \\ &= (\alpha\beta a) \alpha_x \beta_x a_x b_x^2 [\ \ a_x(\alpha\beta b) - b_x(\alpha\beta a)] \\ &= \varphi'' - \frac{1}{6} f(2Tf - S\Delta) \quad (^1). \end{aligned}$$

---

(1) *Voir* l'équation (40), p. 299.

Si l'on porte ces expressions de φ, φ'' dans la formule (34), il vient

$$(36)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi &= -\frac{4}{3}\psi - \frac{1}{9}\mathrm{T}f^2 + \frac{1}{6}\mathrm{S}\Delta f,\\ \varphi' &= -\frac{2}{3}\psi - \frac{1}{18}\mathrm{T}f^2,\\ \varphi'' &= -\frac{4}{3}\psi + \frac{2}{9}\mathrm{T}f^2 - \frac{1}{6}\mathrm{S}\Delta f.\end{aligned}\right.$$

La première de ces trois équations est celle dont il a été fait précédemment usage.

Pour démontrer que les formes ψ et Ω sont des combinants, il suffit de montrer qu'il en est ainsi pour la forme mixte N dont toutes deux sont déduites d'après (22) et (28). Que N et $\mathrm{N}_{\varkappa\lambda}$ ne diffèrent que d'un facteur, c'est ce qui s'aperçoit déjà par le fait que les polaires linéaires de x relativement aux courbes

$$\varkappa f + \lambda\Delta = 0$$

forment un faisceau de rayons dont le centre est donné précisément par $\mathrm{N} = 0$. Pour reconnaître dans ce facteur une puissance de G, nous partirons de la forme

$$(37)\qquad \mathrm{H} = a_x^3\alpha_y^3 - a_y^3\alpha_x^3 = f(x)\Delta(y) - \Delta(x)f(y),$$

que l'on peut po^er comme base de toutes les formations combinantes, comme cela est possible à démontrer ([1]). Or on a

$$\begin{aligned}[f(x)\Delta(y) - \Delta(x)f(y)]_{\varkappa\lambda} &= \begin{vmatrix} \varkappa f(x) + \lambda\Delta(x) & \mathrm{G}_1\Delta(x) - \mathrm{G}_2 f(x)\\ \varkappa f(y) + \lambda\Delta(y) & \mathrm{G}_1\Delta(y) - \mathrm{G}_2 f(y)\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix} \varkappa & \lambda\\ -\mathrm{G}_2 & \mathrm{G}_1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} f(x) & \Delta(x)\\ f(y) & \Delta(y)\end{vmatrix}\\ &= \mathrm{G}(\varkappa,\lambda)\,[f(x)\Delta(y) - \Delta(x)f(y)].\end{aligned}$$

Donc la forme H *est un combinant :* $\mathrm{H}_{\varkappa\lambda} = \mathrm{GH}$.

([1]) *Voir*, pour plus de détails sur les combinants des formes cubiques ternaires, le Mémoire de Clebsch et Gordan (*Math. Annalen*, t. VI), et la huitième Section de ce Chapitre; sur les combinants en général, *Math. Annalen*, t. V, p. 95.

Mais, d'après (37),

$$H = (a_x \alpha_y - a_y \alpha_x)(a_x^2 \alpha_y^2 + \alpha_x^2 a_y^2 + a_x \alpha_x a_y \alpha_y),$$

et l'on a identiquement (p. 304)

$$0 = (a_x \alpha_y - a_y \alpha_x)(a_x^2 \alpha_y^2 + \alpha_x^2 a_y^2 - 2 a_x \alpha_x a_y \alpha_y) = (a_x \alpha_y - a_y \alpha_x)^3,$$

d'où aussi l'égalité

$$H = \frac{1}{2}(a_x \alpha_y - a_y \alpha_x)(a_x^2 \alpha_y^2 + \alpha_x^2 a_y^2 + 4 a_x \alpha_x a_y \alpha_y).$$

Mais on tire la même chose de $N = (a\alpha u) a_x^2 \alpha_x^2$ si l'on différentie itérativement N suivant les x, qu'on multiplie par les y, qu'on ajoute et qu'on remplace finalement les u par les déterminants des x, y. H est donc une forme provenant de N et en provenant par des opérations linéaires. *Mais de même aussi* N *provient de* H, car on peut poser pour N la valeur que prend l'expression [1]

$$\frac{1}{18}\left[u_1\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial y_3} - \frac{\partial^2 H}{\partial x_3 \partial y_2}\right) + u_2\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_3 \partial y_1} - \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial y_3}\right) + u_3\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial y_1}\right)\right]$$

lorsqu'on y fait les y égaux aux x. La dépendance de N et de H se trouve par là démontrée, et il s'ensuit que *la forme* N *et conséquemment aussi* ψ *et* Ω *sont des combinants;* on a

$$N_{\varkappa\lambda} = GN, \quad \psi_{\varkappa\lambda} = G^2\psi, \quad \Omega_{\varkappa\lambda} = G^3\Omega.$$

Nous avons ainsi démontré tous les théorèmes dont nous avons fait usage pour l'établissement des formules (33).

On aurait pu également rattacher l'examen du problème des points d'inflexion à l'étude des formes adjointes $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{T}$. Au lieu des points d'inflexion, il s'agit alors de trouver les neuf tangentes de rebroussement communes au système $\varkappa\mathfrak{S} + \lambda\mathfrak{T} = 0$. On reconnaît immédiatement sur la forme canonique que *ces courbes ont toutes pour tangentes de rebroussement les droites harmoniques*

(1) Cette dernière, si l'on pose symboliquement $H = h_x^3 k_y^3$, peut s'écrire d'une façon plus concise sous la forme $\frac{1}{2}(hku) h_x^2 k_y^2$.

de $f=0$ et forment en conséquence le système de courbes de troisième classe déjà mentionné plus haut (p. 247). $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{T}$ ont été en effet définis par

$$\mathfrak{S}=\frac{1}{4}\sum\frac{\partial S}{\partial a_{ikh}}u_i u_k u_h,\qquad \mathfrak{T}=\frac{1}{6}\sum\frac{\partial T}{\partial a_{ikh}}u_i u_k u_h;$$

on tire conséquemment de (14) et (15)

$$\mathfrak{S}'=\frac{1}{12}\frac{\partial S'}{\partial a}\left(v_1^3+v_2^3+v_3^3\right)+\frac{1}{4}\frac{\partial S'}{\partial b}v_1 v_2 v_3,$$

car on a

$$\frac{\partial S'}{\partial a_{111}}=\frac{\partial S'}{\partial a_{222}}=\frac{\partial S'}{\partial a_{333}}=\frac{1}{3}\frac{\partial S'}{\partial a}.$$

Il vient de même

$$\mathfrak{T}'=\frac{1}{18}\frac{\partial T'}{\partial a}(v_1^3+v_2^3+v_3^3)+\frac{1}{6}\frac{\partial T'}{\partial b}v_1 v_2 v_3,$$

d'où, en effectuant les calculs,

$$\mathfrak{S}'=6(4b^3-a^3)v_1v_2v_3-6ba^2(v_1^3+v_2^3+v_3^3),$$
$$\mathfrak{T}'=12b^2(4b^3+5a^3)v_1v_2v_3+2(10b^3-a^3)a^2(v_1^3+v_2^3+v_3^3).$$

La forme des équations $\mathfrak{S}=0$, $\mathfrak{T}=0$ est donc, en fait, la même que celle des équations $f=0$, $\Delta=0$. Toutefois, pour étudier les formations invariantes du système $\varkappa\mathfrak{S}+\lambda\mathfrak{T}$, on prend pour base deux autres formes Π et Φ de ce système, formes caractérisées par la circonstance que la formation $\Delta\Pi-f\Phi$ est un combinant et qu'elles satisfont aux conditions

$$\Pi_{\varkappa\lambda}=G^2(\varkappa\Pi+\lambda\Phi),\quad \Phi_{\varkappa\lambda}=G^2(G_1\Phi-G_2\Pi).$$

Elles sont définies par les équations [1]

$$(38)\qquad \begin{cases}\Pi=S\mathfrak{T}-T\mathfrak{S},\\ \Phi=T\mathfrak{T}-\frac{1}{6}S^2\mathfrak{S}.\end{cases}$$

---

[1] L'introduction de ces formations permet, par exemple, de représenter d'une manière plus concise les expressions obtenues plus haut pour $\mathfrak{S}_{\varkappa\lambda}$ et $\mathfrak{T}_{\varkappa\lambda}$ (p. 300 et

Pour le système $\varkappa\Pi + \lambda\mathfrak{P}$ il existe corrélativement à la forme ψ une forme de sixième classe composée avec F, l'équation en coor-

---

302); on trouve

$$\mathrm{R}\,\mathcal{S}_{\varkappa\lambda} = \frac{1}{4}\left(\mathfrak{P}\frac{\partial \mathrm{S}_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa} - \Pi\frac{\partial \mathrm{S}_{\varkappa\lambda}}{\partial\lambda}\right), \quad \mathrm{R}\mathfrak{T}_{\varkappa\lambda} = \frac{1}{6}\left(\mathfrak{P}\frac{\partial \mathrm{T}_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa} - \Pi\frac{\partial \mathrm{T}_{\varkappa\lambda}}{\partial\lambda}\right).$$

Voir, pour les détails, le Mémoire cité de Clebsch et Gordan (*Math. Annalen*, t. VI), Nous mentionnerons seulement ici quelques résultats, qui sont connexes à nos recherches précédentes sur le système tangentiel conjugué à un réseau de coniques (p. 250). Nous avons alors établi l'équation d'une courbe du troisième ordre, dont la hessienne est donnée par $i_x^3 = 0$, la cayleyenne par $u_h^3 = 0$, et cela sous la forme

$$p_x^3 \equiv 2(hh'x)^2 i_x i_h i_{h'} - (hh'h'')(hh'x)(h'h''x)(h''hx) = 0.$$

Or le premier membre de cette équation ne peut différer que par un facteur de notre forme primitive f, si nous posons (*voir* la note de la page 287)

(1) $$6i_x^3 = \Delta = \alpha_x^3, \quad 6u_h^3 = \mathcal{S} = u_s^3.$$

Alors on obtient le premier terme de p_x^3 en établissant la forme $\Theta^{(\Sigma)} = (ss'x)^2 u_s u_{s'}$, en remplaçant les u par α et en multipliant par α_x. Mais on a [*voir* équation (90), *loc. cit.*]

$$\Theta^{(\Sigma)} = \mathfrak{H} + \frac{1}{2}\mathrm{S}\Theta,$$

et il vient conséquemment, d'après l'équation (40), page 299,

(2) $$6^2(hh'x)^2 i_h i_{h'} i_x = \Delta_2 + \frac{1}{2}\mathrm{S}\,\Delta_1 = \frac{1}{6}\mathrm{S}^2 f - \frac{1}{3}\mathrm{T}\,\Delta.$$

Le deuxième terme de p_x^3 donne, égalé à zéro, la cayleyenne $\mathcal{S}^{(\Sigma)} = 0$ de $u_h^3 = 0$. Mais on a [*loc. cit.*, équation (99)]

$$\mathcal{S}^{\varkappa\Pi + \lambda \mathrm{P}} = \frac{2}{3}\mathrm{R}^2(\mathrm{G}_2 f - \mathrm{G}_1\Delta) = -\frac{2}{3}\mathrm{R}^2\Delta_{\varkappa\lambda},$$

et de là résulte, si l'on représente $\mathcal{S} = 6u_h^3$ sous la forme $\varkappa\Pi + \lambda\mathfrak{P}$ au moyen des équations (38),

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{(\Sigma)} &= (ss's'')(ss'x)(ss''x)(s's''x)\\ &= -6^3(hh'h'')(hh'x)(hh''x)(h'h''x)\\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\mathrm{S}^2 f + \mathrm{T}\,\Delta\right).\end{aligned}$$

Les équations (2), (3) nous donnent en fait, pour p_x^3, la relation demandée

$$6^2 p_x^3 = \frac{2}{3}\mathrm{S}^2 f.$$

Nous avons d'ailleurs établi l'équation de la courbe de troisième classe, dont les polaires coniques sont harmoniquement inscrites à celles de $p_x^3 = 0$ (p. 256); cette

données-lignes de $f = 0$, $\mathcal{S}$ et $\mathfrak{T}$ ([1]), et une forme de neuvième classe qui répond dualistiquement à la forme Ω. Mais d'après (29), dans la forme canonique, Ω est devenu le produit des différences de y_1^3, y_2^3, y_3^3. De même la forme de neuvième classe ne diffère du produit

$$(v_1^3 - v_2^3)(v_2^3 - v_3^3)(v_3^3 - v_1^3)$$

que par un facteur. Mais une équation $v_1^3 - v_2^3 = 0$ est l'équation du produit des trois points d'inflexion placés sur le côté $y_3 = 0$, car ceux-ci satisfont encore à la condition

$$y_1^3 + y_2^3 = (y_1 + y_2)(y_1 + \varepsilon y_2)(y_1 + \varepsilon^2 y_2) = 0,$$

et l'équation du point de rencontre d'une ligne $y_1 + \varepsilon^i y_2 = 0$ avec $y_3 = 0$ est précisément

$$v_2 - \varepsilon^i v_1 = 0.$$

La forme adjointe de neuvième classe représente donc, égalée à zéro, le produit des neuf points d'inflexion ([2]).

Et dualistiquement :

La forme de neuvième ordre Ω [formule (28)] représente, égalée à zéro, le produit des neuf droites harmoniques.

équation est

$$-8u_\pi^3 = (ii'u)^2 i_k i'_k u_k + (ii'i'')(ii'u)(i'i''u)(i''iu) = 0.$$

Mais, en vertu de (1), on trouve [*loc. cit.*, équation (92)],

$$6^2(ii'u)^2 i_k i'_k u_k = (\alpha\beta u)^2 \alpha_s \beta_s u_s = \mathfrak{X}_s^2 u_s^2 u_s$$
$$= \frac{1}{2} S\mathfrak{T} - \frac{1}{3} T\mathcal{S},$$

et ensuite (à cause de l'expression de $\mathcal{S}_{\kappa\lambda}$)

$$6^2(ii'i'')(ii'u)(i'i''u)(i''iu) = -(\alpha\beta\gamma)(\alpha\beta u)(\alpha\gamma u)(\beta\gamma u)$$
$$= -\mathcal{S}_\Delta = \frac{2}{3} T\mathcal{S} - \frac{1}{2} S\mathfrak{T},$$

et nous obtenons ainsi

$$-8.6^2 u_\pi^3 = S\mathfrak{T} - T\mathcal{S} = \Pi.$$

L'équation $\Pi = 0$ *représente donc la courbe de troisième classe dont le réseau polaire tangentiel est conjugué au réseau polaire de* $f = 0$ (Aronhold, *loc. cit.*)

([1]) Comparez la représentation de Φ, *loc. cit.*, § 18.

([2]) *Sur la formation du produit des équations des neuf tangentes d'inflexion, voir* Salmon, *Lessons on higher Algebra*, et Clebsch, *Journal de Crelle*, t. 58.

Nous avons vu (p. 295) que la courbe du troisième ordre ne peut avoir qu'un invariant absolu et n'a, par suite, que deux invariants. Nous nous proposons d'utiliser cette circonstance pour démontrer la proposition obtenue plus haut géométriquement, qui consiste en ce que *le rapport anharmonique des quatre tangentes menées d'un point de la courbe du troisième ordre à cette dernière est constant,* et pour exprimer l'invariant absolu en fonction de ce rapport anharmonique de la courbe.

Si l'on a $a_y^3 = 0$, l'équation du produit des quatre tangentes que l'on peut mener de y à la courbe $f \equiv a_x^3 = 0$ est (p. 226)

$$\begin{aligned} 4f\mathrm{D}^2f - 3(\mathrm{D}f)^2 &\equiv 4a_x^3\, b_y^2\, b_x - 3a_x^2 a_y\, b_x^2 b_y = 0 \\ &= \mathrm{A}_x^4 = \mathrm{B}_x^4 = \mathrm{C}_x^4, \end{aligned}$$

courbe du quatrième ordre qui, d'après sa nature spéciale, est coupée par toute ligne u en quatre points dont le rapport anharmonique est le même. Donc la courbe de quatrième classe (t. I, p. 348)

$$i \equiv (\mathrm{AB}u)^4 = 0,$$

dont les tangentes rencontrent la courbe A_x^4 en quatre points équianharmoniques, ou bien est touchée par toutes les lignes u, ou bien représente encore le point y. La forme $(\mathrm{AB}u)^4$ doit, en conséquence, se décomposer en deux facteurs, dont l'un est indépendant des u, l'autre des A, B. Mais ce dernier ne peut être que u_y^4, comme on l'aperçoit de suite géométriquement. Or, comme $(\mathrm{AB}u)^4$ est une formation invariante, il ne reste plus pour le premier qu'une expression invariante dépendant uniquement des coefficients de la forme primitive f et du quatrième degré par rapport à ces coefficients, c'est-à-dire l'invariant S. On a donc[1]

$$(39) \qquad i = (\mathrm{AB}u)^4 = c\mathrm{S}u_y^4,$$

et de même

$$(40) \qquad j = (\mathrm{AB}u)^2(\mathrm{AC}u)^2(\mathrm{BC}u)^2 = c'\mathrm{T}u_y^6,$$

---

[1] Les invariants et les covariants de la forme binaire donnée par les quatre tangentes issues de y ont été, dans ces derniers temps, complètement représentés par Harnack au moyen des invariants fonctionnels de f (*Math. Annalen*, t. IX, p. 218).

c, c' désignant des facteurs numériques. Or le rapport anharmonique des quatre rayons $A_x^4 = 0$ dépend, comme on sait, de l'invariant absolu

$$\frac{i^3}{j^2} = \frac{c^3}{c'^2}\,\frac{S^3}{T^2};$$

il est donc *indépendant* de y, ce qu'il fallait démontrer. Nous avons en particulier ce théorème :

Le rapport anharmonique d'une courbe du troisième ordre est équianharmonique *en cas d'évanouissement de l'invariant* S, harmonique *en cas d'évanouissement de l'invariant* T. *Une courbe équianharmonique est donc caractérisée, d'après ce qui précède, par le fait que sa hessienne se décompose en trois droites et qu'aux points doubles de cette courbe les tangentes d'inflexion se coupent trois à trois, une courbe harmonique par la circonstance que la hessienne de sa hessienne n'est autre que la courbe primitive* (p. 247 et 300).

Nous avons précédemment représenté l'invariant absolu d'une forme binaire biquadratique comme fonction du rapport anharmonique α ; nous avons trouvé (*voir* équation (28), t. I, p. 297)

$$\frac{i^3}{j^2} = 24\,\frac{(1+\alpha+\alpha^2)^3}{(1+\alpha)^2(2-\alpha)^2(1-2\alpha)^2}.$$

Nous obtenons en particulier, pour $\alpha = 1$, la condition pour une racine double : $i^3 - 6j^2 = 0$. Mais le premier membre de cette équation doit, dans notre cas, se confondre avec le discriminant de $f = a_x^3$, à un facteur près, c'est-à-dire avec

$$6R = 6T^2 - S^3.$$

Nous avons donc, en vertu de (39) et (40),

$$Ci^3 = c^3 S^3 u_y^{12}, \quad Cj^2 = c'^2 T^2 u_y^{12},$$

d'où $\frac{c^3}{c'^2} = 1$. *L'invariant absolu est lié avec le rapport anharmonique α de la courbe du troisième ordre par l'équation*

$$(41) \qquad \frac{S^3}{T^2} = \frac{i^3}{j^2} = 24\,\frac{(1-\alpha+\alpha^2)^3}{(1+\alpha)^2(2-\alpha)^2(1-2\alpha)^2}.$$

Naturellement, on a de même, pour une courbe du faisceau $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$,

$$\frac{S_{\varkappa\lambda}^3}{T_{\varkappa\lambda}^2} = 24\,\frac{(1 - \alpha_{\varkappa\lambda} + \alpha_{\varkappa\lambda}^2)^3}{(1 + \alpha_{\varkappa\lambda})^2 (2 - \alpha_{\varkappa\lambda})^2 (1 - 2\alpha_{\varkappa\lambda})^2},$$

et, comme $\varkappa$, λ entrent au douzième degré dans S^3 et T^2, il s'ensuit qu'il existe toujours dans le faisceau syzygétique $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$ douze courbes de même rapport anharmonique (toutefois il n'y en a que quatre équianharmoniques et six harmoniques).

VI. — Courbes du troisième ordre à point double ou à point de rebroussement. — Leurs dégénérations.

Après avoir exposé dans ce qui précède les points les plus importants de la théorie des courbes générales du troisième ordre, il nous reste à rechercher les modifications que subissent les relations étudiées en cas de survenance de singularités, et spécialement en cas de point double ou cuspidal et de décomposition de la courbe que l'on considère. Nous aurons, dans cette voie, à nous occuper de deux questions essentiellement distinctes :

1° Quelles sont les relations nécessaires et suffisantes entre les invariants fonctionnels de la forme cubique pour caractériser chaque singularité ?

2° Comment peut-on, en supposant ces relations satisfaites, représenter les points ou tangentes singulières qui se rencontreront au moyen des invariants fonctionnels de la forme primitive ?

Enfin on devrait en troisième lieu rechercher quelles particularités offriraient les diverses courbes covariantes dans les cas spéciaux considérés. Toutefois, cette dernière question nous conduirait trop loin ; même pour la réponse aux deux premières que nous avons posées, les fragments de la théorie des formes cubiques ternaires donnés plus haut ne suffisent pas ; nous aborderons d'ailleurs ces deux questions pour être complets, mais en nous référant éventuellement à d'autres travaux (1). Au surplus nous apprendrons à connaître, dans la théorie des courbes à point double comme

(1) Et en particulier au Mémoire plusieurs fois cité de Clebsch et Gordan, *Math. Annalen*, t. VI.

dans celle des courbes à point de rebroussement, de nouveaux moyens auxiliaires pour l'étude de la Géométrie sur une courbe, moyens dont l'extension conduira plus tard aux applications des fonctions elliptiques à la théorie des courbes générales du troisième ordre.

Nous commencerons par l'examen des *courbes qui ont un point double* ([1]).

Ces courbes sont caractérisées par l'évanouissement du discriminant R, lequel est formé avec les deux invariants

$$S = (abc)(abd)(acd)(bcd), \quad T = (abc)(abd)(ace)(bcf)(def)^2$$

de la manière suivante (p. 308):

$$R = T^2 - \frac{1}{6} S^3.$$

Donc ici se présente immédiatement la question de la détermination du point double y dans l'hypothèse $R = 0$. Nous devons chercher à découvrir une forme adjointe qui, égalée à zéro, représente ce point compté au moins trois fois, car il n'existe pas de forme adjointe de classe moins élevée. Or, on a une forme de cette nature dans la forme désignée précédemment (p. 322) par Π et définie par l'équation

$$\Pi = S\mathfrak{G} - T\mathfrak{S}. \tag{1}$$

Pour le prouver, nous démontrerons d'abord la proposition auxiliaire suivante :

Si les courbes d'un faisceau

$$\varkappa a_x^n + \lambda \alpha_x^n = 0 \tag{2}$$

se touchent toutes en un point de base y, il existe dans le faisceau une courbe qui a en y un point double; il existe en outre

$$3(n-1)^2 - 2$$

courbes ayant des points doubles en d'autres points, c'est-à-dire

---

([1]) On trouvera des points nombreux de la théorie de ces courbes traités plus en détail dans l'Ouvrage de Salmon, ainsi que dans WEYR, *Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde*, Leipzig, 1869.

que, parmi les $3(n-1)^2$ *courbes à point double figurant en général dans un réseau, deux se confondent avec celle qui a un point double en* y (¹).

Comme les courbes (2) ont toutes la même tangente en y, on peut poser $a_y^{n-1} a_i = \rho\alpha_y^{n-1}\alpha_i$, ρ étant une constante. Pour $\lambda = -\rho$, on obtient par suite une courbe qui a en y un point double, ainsi qu'il a été énoncé. Soient ensuite z et t deux points quelconques; relions projectivement chacun des deux faisceaux

$$\varkappa a_z a_x^{n-1} + \lambda\alpha_z\alpha_x^{n-1} = 0 \quad \text{et} \quad \varkappa a_t a_x^{n-1} + \lambda\alpha_t\alpha_x^{n-1} = 0$$

au faisceau de polaires

$$\varkappa a_y a_x^{n-1} + \lambda\alpha_y\alpha_x^{n-1} = 0. \tag{3}$$

Les points d'intersection des polaires correspondantes engendrent respectivement les deux courbes

$$(a_z\alpha_y - a_y\alpha_z)a_x^{n-1}\alpha_x^{n-1} = 0 \quad \text{et} \quad (a_t\alpha_y - a_y\alpha_t)a_x^{n-1}\alpha_x^{n-1} = 0,$$

ou, si l'on pose $u_i = (yz)_i$, $v_i = (yt)_i$,

$$(a\alpha u)\,a_x^{n-1}\alpha_x^{n-1} = 0 \quad \text{et} \quad (a\alpha v)\,a_x^{n-1}\alpha_x^{n-1} = 0. \tag{4}$$

Ces dernières se coupent en $4(n-1)^2$ points; on s'assure facilement que $3(n-1)^2$ de ces points de rencontre tombent aux points doubles du faisceau (2), tandis que les $(n-1)^2$ restants sont identiques aux points de base du faisceau (3). Actuellement, si une courbe (3) telle que $a_x^n = 0$ a un point double en y, on démontre aisément (au moyen de la méthode employée à la page 98) que chacune des deux courbes (4) a également en y un point double. Ces courbes se coupent donc encore en $4(n-1)^2 - 4$ points simples; parmi eux $(n-1)^2 - 2$ tombent nécessairement aux points de base simples du faisceau (3); il ne reste donc plus que

$$4(n-1)^2 - 4 - [(n-1)^2 - 2] = 3(n-1)^2 - 2$$

points où les courbes du faisceau peuvent avoir un point double.

C. Q. F. D.

(¹) CREMONA, *Einleitung in die Theorie der ebenen Curven*, n° 88.

Considérons maintenant en particulier le faisceau (¹)

$$(5) \qquad \varkappa a_x^3 + \lambda u_x^3 = 0,$$

$u_x = 0$ étant une droite quelconque. Soit $R_{\varkappa\lambda}$ le discriminant de la courbe (5) et soient $S_{\varkappa\lambda}$, $T_{\varkappa\lambda}$ ses deux invariants. On aura

$$(6) \quad \begin{cases} S_{\varkappa\lambda} = \varkappa^4 S + \varkappa^3\lambda\,\delta S + \frac{1}{2}\varkappa^2\lambda^2\delta^2 S + \frac{1}{2.3}\varkappa\lambda^3\delta^3 S + \frac{1}{2.3.4}\lambda^4\delta^4 S, \\ T_{\varkappa\lambda} = \varkappa^6 T + \varkappa^5\lambda\,\delta T + \frac{1}{2}\varkappa^4\lambda^2\delta^2 T + \ldots + \lambda^6\delta^6 T, \end{cases}$$

le symbole d'opération δ étant défini par

$$\delta\varphi = \sum_{i,k,h} \frac{\partial\varphi}{\partial a_{ikh}} u_i u_k u_h.$$

Or on trouve

$$\begin{aligned} &\delta S = 4\mathfrak{S}, \quad \delta T = 6\mathfrak{T}, \\ &\delta\mathfrak{S} = \delta[(abc)(abu)(acu)(bcu)] = 0, \\ &\delta\mathfrak{T} = \delta[(abd)(abu)(aeu)(bfu)(def)^2] \\ &\quad = (abu)^2(efu)^2(aeu)(bfu) = F, \\ &\delta F = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, il vient

$$(7) \quad \begin{cases} S_{\varkappa\lambda} = \varkappa^3(\varkappa S + 4\lambda\mathfrak{S}), \\ T_{\varkappa\lambda} = \varkappa^4(\varkappa^2 T + 6\varkappa\lambda\mathfrak{T} + 3\lambda^2 F), \end{cases}$$

$$(8) \quad \begin{cases} R_{\varkappa\lambda} = T_{\varkappa\lambda}^2 - \frac{1}{6}S_{\varkappa\lambda}^3 \\ \quad = \varkappa^8[\varkappa^4 R + 2\varkappa^3\lambda(6T\mathfrak{T} - S^2\mathfrak{S}) \\ \qquad + 2\varkappa^2\lambda^2(18\mathfrak{T}^2 + 3TF - 4S\mathfrak{S}^2) \\ \qquad + \frac{4}{3}\varkappa\lambda^3(27\mathfrak{T}F - 8\mathfrak{S}^3) + 9\lambda^4 F^2]. \end{cases}$$

Donc, dans un faisceau de courbes du troisième ordre où figure

(¹) Pour la méthode employée dans ce qui suit, *voir* HERMITE, *Journal de Crelle*, t. 84, p. 300, et LINDEMANN, *ibid.*, p. 302.

une droite comptant trois fois, il n'y a plus que quatre courbes à point double.

La courbe $a_x^3 = 0$ peut avoir elle-même un point double en y, de sorte que $R = 0$. Alors, dans $R_{\varkappa\lambda}$, tous les termes doivent renfermer le facteur u_y, car si u_y est égal à zéro, *toutes* les courbes du faisceau (5) ont évidemment en y un point double. Le second terme de $R_{\varkappa\lambda}$ est surtout important pour nous; nous allons montrer qu'il est proportionnel à la troisième puissance de u_y. Considérons dans ce but, à la place du faisceau (5), le faisceau

$$\varkappa a_x^3 + \lambda u_x v_x w_x = 0. \tag{9}$$

Désignons par $R'_{\varkappa\lambda}$ le discriminant d'une courbe de ce faisceau, en sorte que l'on ait

$$R'_{\varkappa\lambda} = \varkappa^{12} R + \varkappa^{11}\lambda R_1 + \ldots,$$

en posant

$$R_1 = \frac{1}{6}\sum \frac{\partial R}{\partial a_{ikh}}(u_i v_k w_h + w_i u_k v_h + v_i w_k u_h + u_k v_i w_h + w_k u_i v_h + w_i v_k u_h).$$

Or on a, d'après (8),

$$\sum \frac{\partial R}{\partial a_{ikh}} u_i u_k u_h = 12\left(T\mathfrak{S} - \frac{1}{6}S^2 \mathfrak{s}\right) = 12\,\mathfrak{P} = 12\,u_r^3;$$

il vient, par suite,

$$R_1 = 12\,u_r v_r w_r = 2\sum \frac{\partial^2 \mathfrak{P}}{\partial u_i \partial u_k} v_i w_k.$$

Actuellement, si l'on a $R = 0$ et $u_y = 0$, toutes les courbes (9) se touchent en y, et la courbe $a_x^3 = 0$ doit être comptée deux fois, d'après un lemme précédent. Pour l'équation $R_{\varkappa\lambda} = 0$, la valeur $\lambda = 0$ sera donc une racine double; il suit de là que non-seulement $\mathfrak{P} = u_r^3$, mais aussi $u_r v_r w_r$ renferme le facteur u_y, ce qui n'est possible que si u_r^3 est proportionnel à u_y^3. Notre proposition est par là démontrée.

Au lieu de la forme Π on peut introduire la forme $\mathfrak{P}$ définie par (1), car on a, à cause de $R = 0$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{P} &= T\mathfrak{S} - \frac{1}{6}S^2\mathfrak{s}\\ &= \frac{S^2}{6T}(S\mathfrak{S} - T\mathfrak{s}) = \frac{S^2}{6T}\Pi.\end{aligned}$$

Nous avons donc l'équation (¹)

$$\Pi \equiv u_\pi^3 \equiv \Sigma\Sigma\Sigma \pi_{ikh} u_i u_k u_h = (u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3)^3,$$

et les coordonnées du point double y se déterminent par la proportion continue

$$y_1^3 : y_1^2 y_2 : y_1^2 y_3 : \ldots : y_1 y_2 y_3 = \pi_{111} : \pi_{112} : \ldots : \pi_{123},$$

où l'on a, pour $\mathfrak{T} = u_t^3$, $\mathfrak{S} = u_s^3$,

$$\pi_{ikh} = S t_{ikh} - T s_{ikh}.$$

Après que le point double a été ainsi trouvé, on peut mettre l'équation de la courbe sous une forme canonique très simple. Deux côtés du triangle de base qu'il convient d'introduire sont donnés par les deux tangentes du point double et se trouveront conséquemment par décomposition de l'expression $a_y a_x^2$ en ses deux facteurs linéaires (t. I, p. 131); le troisième côté est formé par l'unique ligne inflexionnelle. On n'a plus en effet que trois points d'inflexion; les six autres sont rassemblés au point double (p. 27 et 71), puisque la hessienne $\Delta = 0$ y a elle-même un point double et que ses deux branches y touchent celles de la courbe primitive. Les trois points d'inflexion sont naturellement encore sur une droite, et c'est cette dernière qui doit former le troisième côté de notre triangle de coordonnées. Pour la trouver, il nous faut chercher les courbes évanouissantes du faisceau

$$(10) \qquad \varkappa f + \lambda \Delta = 0,$$

lesquelles sont en général données par l'équation du quatrième degré $G(\varkappa, \lambda) = 0$. Or cette dernière, par suite de ce qu'en vertu de $R = 0$ ses deux invariants s'évanouissent (p. 307, et t. I, p. 299 et suiv.), a trois racines égales.

Il existe donc dans le faisceau (10) *deux courbes qui se décom-*

(¹) On peut appliquer la même méthode pour démontrer que

$$\sum \frac{\partial R}{\partial a_{ikh\ldots}} u_i u_k u_h \ldots = u_y^n$$

si $R = 0$, R désignant le discriminant d'une courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre et y son point double. *Voir* aussi Sylvester, *Philosophical Magazine*, 4ᵉ série, t. III, 1852.

posent en trois droites, la première comptant trois fois et la seconde une fois seulement.

La première ne donne pas d'ailleurs de triangle proprement dit, car, ainsi qu'on peut le démontrer en effectuant par des considérations de limites le passage de la courbe générale à la courbe spéciale et en ayant égard à ce que six points d'inflexion sont réunis au point double, elle se compose des lignes qui joignent le point double aux trois points d'inflexion. La dernière, au contraire, se compose de la ligne inflexionnelle et des deux tangentes au point double ; deux côtés nous sont donc déjà connus par décomposition de l'expression $a_y\, a_x^2$ en facteurs linéaires, et il est ainsi facile de trouver les coordonnées du troisième côté. Soit $x_3 = 0$ l'équation de ce dernier, et soient $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ les équations des tangentes au point double. L'équation de la courbe peut toujours être mise sous la forme

$$f \equiv \alpha x_1^3 + \beta x_2^3 + 6\gamma x_1 x_2 x_3 = 0,$$

car cette courbe a en $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ un point double et ces côtés eux-mêmes du triangle pour tangentes ; ensuite $x_3 = 0$ coupe la courbe aux points d'inflexion, puisque l'équation de la hessienne devient

$$\frac{1}{6}\Delta = \begin{vmatrix} \alpha x_1 & \gamma x_3 & \gamma x_2 \\ \gamma x_3 & \beta x_2 & \gamma x_1 \\ \gamma x_2 & \gamma x_1 & 0 \end{vmatrix} = \gamma^2(2\gamma x_1 x_2 x_3 - \alpha x_1^3 - \beta x_2^3);$$

la hessienne ne rencontre donc la courbe $f = 0$ en dehors du point double qu'aux points où celle-ci est rencontrée par $x_3 = 0$. Mais nous pouvons encore, en modifiant la définition des coordonnées x, faire disparaître dans f les constantes α, β, γ au moyen de la multiplication par des facteurs convenables, ce qui correspond à la circonstance que la courbe du troisième ordre à point double n'a plus d'invariant absolu (c'est-à-dire plus de constante qui la caractérise absolument). Il résulte aussi de ce dernier fait que *toute* courbe C_3 à point double est représentable sous la forme précédente, car une telle courbe peut être transformée en une quelconque de même nature. Nous avons par conséquent ce théorème :

L'équation d'une courbe du troisième ordre à point double

peut toujours être amenée d'une seule manière à la forme

(11) $$f \equiv x_1^3 + x_2^3 + 6x_1x_2x_3 = 0,$$

et l'équation de la hessienne est alors

$$\frac{1}{6}\Delta \equiv 2x_1x_2x_3 - x_1^3 - x_2^3 = 0.$$

Le faisceau $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$ ou

(12) $$(x_1^3 + x_2^3)(\varkappa - 6\lambda) + 6x_1x_2x_3(\varkappa + 2\lambda) = 0$$

ne renferme maintenant en fait que deux courbes évanouissantes, répondant aux valeurs $\varkappa = 6\lambda$ et $\varkappa = -2\lambda$. On reconnaît d'ailleurs qu'en ce qui concerne la situation des sommets du triangle de base sur la ligne inflexionnelle, a lieu le même théorème que pour une courbe générale (p. 234); ceux-ci, en effet, sont déterminés par les lignes $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, tandis que les points d'inflexion le sont par $x_2^3 + x_1^3 = 0$. En conséquence :

Les tangentes au point double coupent la ligne inflexionnelle en deux points qui représentent la forme hessienne relative à la forme cubique binaire donnée par les trois points d'inflexion. Le covariant Q de cette dernière est déterminé par les trois droites harmoniques des trois points d'inflexion [1].

Ces trois lignes passent par le point double comme la polaire d'un point quelconque; le théorème que nous venons d'énoncer a donc lieu aussi bien pour les rayons du faisceau déterminé par le point double que pour les points de la ligne inflexionnelle $x_3 = 0$. Au surplus, pour ce qui concerne la réalité des points d'inflexion, il en est de même que pour ce qui concerne les points de base d'une forme cubique considérée relativement à la forme hessienne. *Donc, parmi les trois points d'inflexion, deux sont imaginaires conjugués et un réel si les tangentes du point double*

---

[1] On peut, en général (*voir* la suite du texte), relier la géométrie sur la courbe à la théorie des formes cubiques binaires, en prenant à cet effet les rayons allant du point double aux trois points d'inflexion comme rayons de base, ainsi que l'ont fait Igel (*Math. Annalen*, t. VI, p. 633), et Rosenow (*Ueber Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkt*, Breslau, 1873), sans employer la forme canonique. Nous reviendrons plus tard sur ce sujet en traitant des courbes de genre zéro.

sont réelles; au contraire, *tous sont réels si les tangentes du point double sont imaginaires, c'est-à-dire si ce dernier est un point isolé* (¹).

Nous pouvons d'ailleurs établir une liaison entre la géométrie sur la courbe et la géométrie dans le faisceau de rayons déterminé par le point double, car tout rayon de ce dernier ne rencontre plus la courbe qu'en *un seul* point. *La courbe est donc représentée sans ambiguïté sur le faisceau de rayons et par suite aussi sur une droite quelconque.* Pour donner à cette relation une expression algébrique, pour exprimer les coordonnées d'un point de la courbe par celles du rayon correspondant dans le faisceau, nous recourrons au mode de tracé des courbes du troisième ordre indiqué par Chasles et où l'on emploie un faisceau de rayons et un faisceau de coniques projectif relativement au premier (p. 268). *Une courbe à point double prend en effet naissance lorsque l'on place le sommet du faisceau de rayons en l'un des points de base du faisceau de coniques,* car, le faisceau de rayons étant donné par $x_1 + \lambda x_2 = 0$, l'équation d'un faisceau de coniques projectif de l'espèce annoncée sera de la forme

$$A x_1 + B x_2 + \lambda(C x_1 + D x_2) = 0,$$

A, B, C, D étant linéaires par rapport aux quantités x, et l'on obtient par élimination de λ

$$(A x_1 + B x_2) x_2 - (C x_1 + D x_2) x_1 = 0,$$

équation dans laquelle chaque terme est au moins du second ordre en x_1, x_2. C. Q. F. D.

En se fondant sur ce mode de description, on peut aussi *effectuer la construction de la courbe si le point double* o *et six autres points*

1, 2, 3, 4, 5, 6

(¹) Comment la première de ces courbes dérive de la courbe générale C_3, c'est ce qui a été montré p. 213; quant à la courbe à point isolé, on peut imaginer qu'elle provient de la courbe 3 de la *fig.* 24, l'ovale se rétrécissant de plus en plus de façon à se réduire à un point.

sont donnés. Nous emploierons par exemple les points o, 1, 2, 3 comme points de base d'un faisceau de coniques; nous rapporterons à la conique qui passe par 4 le rayon $\overline{o4}$, à celle qui passe par 5 le rayon $\overline{o5}$, à celle qui passe par 6 le rayon $\overline{o6}$; la relation projective entre le faisceau de rayons et le faisceau de coniques est alors fixée. Si l'on imagine encore que cette relation soit établie de même par le faisceau de tangentes des coniques en l'un des points 1, 2, 3 (p. 95), la construction du point d'intersection d'un rayon quelconque passant par o avec la courbe n'offre plus désormais de difficulté.

Pour obtenir immédiatement l'équation de la courbe sous la forme (11), il suffit de prendre le faisceau de coniques sous la forme

$$(13) \qquad \lambda x_1^2 - x_2^2 + 6x_2x_3 = 0,$$

$x_1 + \lambda x_2 = 0$ étant encore le faisceau de rayons. Mais de (13) résulte, pour $x_1 = -\lambda x_2$,

$$(14) \qquad x_2 + \lambda^2 x_1 - 6\lambda x_3 = 0.$$

Nous trouverons donc, en écrivant $\frac{\lambda}{\mu}$ au lieu de λ,

$$\sigma x_1 = \lambda, \quad \sigma x_2 = -\mu, \quad \sigma x_3 = \frac{\mu^3 + \lambda^3}{6\lambda\mu},$$

ou, en multipliant par $6\lambda\mu$,

$$(15) \qquad \rho x_1 = 6\lambda^2\mu, \quad \rho x_2 = -6\lambda\mu^2, \quad \rho x_3 = \lambda^3 + \mu^3.$$

Les coordonnées des points de la courbe se représentent donc comme des fonctions du troisième degré d'un paramètre $\frac{\lambda}{\mu}$, λ, μ *étant les coordonnées des rayons du faisceau déterminé par le point double, rapportés aux tangentes du point double comme rayons de base; alors à chaque point de la courbe correspond un rayon du faisceau, et réciproquement.*

Cette représentation au moyen d'un paramètre est surtout utile pour l'étude de la Géométrie sur la courbe. Nous allons, en en faisant usage, traiter quelques problèmes que plus tard nous traiterons d'une manière semblable à l'égard des courbes du genre zéro. Coupons la courbe par une droite quelconque u; les valeurs du

paramètre qui correspondent aux points d'intersection se déterminent au moyen de l'équation du troisième degré

$$6\lambda^2\mu u_1 - 6\lambda\mu^2 u_2 + (\lambda^3 + \mu^3)u_3 = 0.$$

Divisant cette dernière par $u_3\mu^3$, nous avons relativement à $\frac{\lambda}{\mu}$ une équation dont le terme constant est toujours égal à l'unité, de quelque manière que la droite ait été choisie. Si donc on désigne par l'addition d'indices les racines de l'équation, on a toujours

$$(16) \qquad \frac{\lambda_1}{\mu_1}\frac{\lambda_2}{\mu_2}\frac{\lambda_3}{\mu_3} = -1,$$

et l'on peut par cette relation déterminer le troisième point d'intersection de toute droite si les deux autres sont connus.

Si en particulier la courbe est touchée par la droite u, deux des racines sont égales entre elles, et nous avons

$$(17) \qquad \frac{\lambda_3}{\mu_3} = -\frac{\mu_1^2}{\lambda_1^2}.$$

Cette équation détermine les deux points de contact

$$(18) \qquad \frac{\lambda_1}{\mu_1} = +\sqrt{-\frac{\mu_3}{\lambda_3}}, \qquad \frac{\lambda_1}{\mu_1} = -\sqrt{-\frac{\mu_3}{\lambda_3}}$$

des tangentes menées d'un point (λ_3, μ_3) *de la courbe à cette dernière, ou inversement le point tangentiel* (λ_3, μ_3) *du point* (λ_1, μ_1).

Si enfin la ligne u est une tangente d'inflexion, il vient

$$\frac{\lambda^3}{\mu^3} = -1 \quad \text{ou} \quad \lambda^3 + \mu^3 = 0,$$

c est-à-dire $x_3 = 0$ comme cela doit être. Les équations (18) donnent immédiatement, en vertu de ce fait que les deux valeurs de $\lambda_1 : \mu_1$ ne diffèrent que par le signe, le théorème suivant :

Si l'on joint au point double les points de contact des deux tangentes que l'on peut mener à la courbe par un point de cette dernière, les lignes de jonction sont situées harmoniquement par rapport aux tangentes du point double. Tous ces couples de rayons forment par suite l'involution quadratique des premières polaires

de la forme binaire cubique représentée par les lignes dirigées vers les points d'inflexion [1].

Par là, à tout point de la courbe correspond un second point, et deux points correspondants ont le même point tangentiel et forment conséquemment un *couple de pôles*, en employant ce mot comme lorsqu'il s'est agi des courbes générales du troisième ordre (p. 258). Mais en cas de point double il n'existe sur la courbe qu'un *seul* système de ces couples, et, en effet, une courbe du troisième ordre du faisceau (12) ne peut être considérée comme hessienne qu'à l'égard d'une courbe unique du même faisceau, car les coefficients deviennent, par l'isolement d'un facteur quadratique commun, linéaires en $\varkappa$, λ. La ligne qui joint les points d'un couple de cette nature enveloppe la cayleyenne (p. 224), et en conséquence nous pouvons aisément établir l'équation de cette dernière. L'équation d'une ligne de jonction telle que celle dont nous parlons est en effet, d'après (18),

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 6\lambda^2\mu & -6\lambda\mu^2 & \lambda^3+\mu^3 \\ 6\lambda^2\mu & 6\lambda\mu^2 & \mu^3-\lambda^3 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en effectuant le calcul,

$$\lambda\mu(\mu^4 x_1 - \lambda^4 x_2 - 6\lambda^2\mu^2 x_3) = 0.$$

La cayleyenne se décompose donc et comprend : 1° *le point double;* 2° *une conique dont les tangentes sont données par*

$$\rho u_1 = -\mu^4, \quad \rho u_2 = \lambda^4, \quad \rho u_3 = 6\lambda^2\mu^2,$$

et dont l'équation est par suite

$$6u_1u_2 + u_3^2 = 0.$$

Cette courbe touche donc les tangentes du point double en leurs points de rencontre avec la ligne inflexionnelle.

---

[1] *Voir* t. I, p. 259. Le fait que les polaires quadratiques d'une forme binaire cubique forment en réalité une involution dont les éléments doubles sont donnés par la forme hessienne s'aperçoit immédiatement.

Nous allons encore utiliser la relation (17) pour l'étude de certains polygones inscrits à la courbe. Nous partons d'un point quelconque λ_0 de la courbe $\left(\lambda_0 \text{ est mis pour } \frac{\lambda_0}{\mu_0}\right)$ et nous menons de ce point une tangente à la courbe, tangente dont le point de contact sera λ_1, puis de ce dernier nous mènerons une tangente dont le point de contact sera en λ_2, et ainsi de suite. On se demande comment doit être situé le point λ_0 pour que le polygone soit fermé, c'est-à-dire pour que le $n^{\text{ième}}$ côté du polygone ainsi construit passe par le point de départ ([1]). Or on a, d'après (17),

$$\lambda_1^2 = -\frac{1}{\lambda_0}, \quad \lambda_2^2 = -\frac{1}{\lambda_1}, \quad \lambda_3^2 = -\frac{1}{\lambda_2}, \quad \ldots, \quad \lambda_n^2 = -\frac{1}{\lambda_{n-1}},$$

et, par conséquent, les paramètres de ces points sont, en suivant l'ordre inverse,

$$\lambda_n, \; \lambda_{n-1} = -\lambda_n^{-2}, \quad \lambda_{n-2} = -\lambda_n^4, \quad \ldots, \quad \lambda_{n-r} = -\lambda_n^{(-2)^r}, \quad \lambda_0 = -\lambda_n^{(-2)^n}.$$

Donc, pour la détermination des points qui peuvent servir de points de départ pour la construction d'un polygone fermé $\lambda_0 = \lambda_n$, *on a l'équation*

$$\lambda_0^{(-2)^n - 1} = -1. \tag{20}$$

Mais on n'obtient en réalité un vrai polygone à n sommets pour *toute* solution de cette équation que si n est un nombre premier. Si, au contraire, on a par exemple $n = mp$, p étant un nombre premier, $(-2)^n - 1$ est divisible par $(-2)^p - 1$, et l'équation (20)

([1]) Ces polygones ont été indiqués par Clebsch relativement à une courbe de troisième classe à tangente double. *Voir* sa Note sur le Mémoire de Cremona, *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements* (*Journal de Crelle*, t. 64), et, pour plus de détails (surtout en ce qui concerne la distinction du réel et de l'imaginaire), DURÈGE, *Math. Annalen*, t. I, p. 509, et ROSENOW, *loc. cit.* L'*hypocycloïde* s'obtient au moyen d'une courbe générale de troisième classe et de quatrième ordre, en choisissant pour tangente double la droite de l'infini et pour les points de contact de cette dernière les points circulaires imaginaires. Des propositions précédentes du texte il résulte alors que deux tangentes à l'hypocycloïde, telles que leurs points de contact soient situés sur une troisième tangente, sont toujours perpendiculaires entre elles, et que leurs points de rencontre décrivent un cercle qui, joint à la droite de l'infini, forme la cayleyenne de l'hypocycloïde.

se forme de l'équation

$$\lambda^{(-2)^p-1} = -1$$

en élevant les deux membres de cette dernière à la puissance α, α étant égal à $\frac{(-2)^n-1}{(-2)^p-1}$. Nous obtenons donc seulement un polygone à p sommets qui sera parcouru α fois pour fournir un polygone à n sommets. On reconnaît qu'une étude plus attentive de ce problème exige des développements qui appartiennent à la théorie des nombres, et à l'aide desquels on arrive du reste facilement à le résoudre (¹).

Nous traiterons encore un problème analogue, dont (pour les courbes sans point double) Steiner a donné le premier la solution. Soient sur la courbe deux points fixes ayant pour paramètres $\frac{\lambda}{\mu} = p$, $\frac{\lambda}{\mu} = q$. Menons par p une droite quelconque qui rencontrera la courbe aux points λ_1, λ_2 par exemple. Joignant λ_2 à q, nous obtiendrons, comme troisième point d'intersection de cette ligne, λ_3, et soit λ_4 le troisième point d'intersection de la ligne qui joint λ_3 à p, et ainsi de suite. Nous construisons ainsi *un polygone dont les côtés impairs passent tous par p, les côtés pairs tous par q*, et dans lequel deux sommets consécutifs sont en ligne droite avec p ou q. Nous nous demandons les conditions de la possibilité de la fermeture d'un tel polygone, c'est-à-dire la condition pour qu'une droite qui en fait partie repasse par λ_1. Or l'équation (16) nous donne les conditions

$$p\lambda_1\lambda_2 = -1,\quad p\lambda_3\lambda_4 = -1,\quad \ldots,\quad p\lambda_{2n-1}\lambda_{2n} = -1,$$
$$q\lambda_2\lambda_3 = -1,\quad q\lambda_4\lambda_5 = -1,\quad \ldots,\quad q\lambda_{2n}\lambda_1 = -1.$$

Si nous multiplions toutes les équations dans lesquelles entre p les unes par les autres et de même toutes celles dans lesquelles entre q, il en résulte

$$p^n = q^n \quad \text{ou} \quad p = q\sqrt[n]{1}.$$

(¹) On traite aussi d'une manière semblable la question des polygones inscrits à la courbe du troisième ordre considérée comme *hessienne* d'une autre courbe, et circonscrits à la *cayleyenne* correspondante. *Voir* ROSENOW, *loc. cit.*

Si donc p est donné, q n'est plus arbitraire; au contraire le point λ_1 peut encore être choisi d'une manière quelconque. Le polygone se ferme toujours, car on peut, au moyen des équations établies, calculer directement et successivement les paramètres de ses sommets. Par conséquent :

Il existe un nombre infiniment grand de polygones à $2n$ côtés et $2n$ sommets dont les sommets sont situés sur une courbe donnée du troisième ordre à point double, dont les côtés impairs se rencontrent en un point p de la courbe et dont les côtés pairs passent par un second point q de celle-ci. Si p est donné, il y aura multiplicité de détermination pour q, et pour deux points corrélatifs p et q il existe une infinité de polygones, puisque le premier côté peut être choisi tout à fait arbitrairement.

On doit d'ailleurs observer encore ici que la nature du nombre n présente de l'importance pour la supputation des solutions *proprement dites* du problème. Nous n'insisterons pas pour le moment sur ces questions, parce que plus tard nous traiterons le même problème relativement aux courbes générales du troisième ordre à l'aide des fonctions elliptiques. D'une manière générale, les considérations présentées ici sont destinées à servir d'exemples pour une méthode d'étude de la Géométrie sur une courbe, méthode que nous développerons plus tard à l'égard des courbes quelconques de genre zéro, avec extension aux courbes de genre quelconque par le moyen des intégrales abéliennes.

Nous abordons l'examen des *courbes à point de rebroussement*. A leur égard, suivant ce qui a été établi par Salmon, ont lieu simultanément les conditions

$$S = 0, \quad T = 0. \tag{21}$$

En effet, S et T sont les deux invariants de la forme biquadratique représentée par les quatre tangentes que l'on peut mener d'un point d'une courbe générale du troisième ordre à cette dernière (p. 325), et leur évanouissement exprime, par suite, que parmi les quatre tangentes trois se confondent, ce qui n'est possible que dans le cas de survenance d'un point de rebroussement. Il s'agit d'abord de calculer les coordonnées y_i du point de rebroussement au moyen des coefficients de f. Nous partirons du faisceau (5), et nous for-

merons pour ce faisceau les formes $S_{\varkappa\lambda}$, $T_{\varkappa\lambda}$, $R_{\varkappa\lambda}$; en vertu de (21), il résulte de (7) et (8)

$$S_{\varkappa\lambda} = 4\varkappa^3\lambda\mathfrak{S},\quad T_{\varkappa\lambda} = 3\varkappa^4\lambda(2\varkappa\mathfrak{G} + \lambda F),$$

$$R_{\varkappa\lambda} = \varkappa^8\lambda^2\left[36\varkappa^2\mathfrak{G}^2 + \frac{4}{3}\varkappa\lambda(27\mathfrak{G}F - 8\mathfrak{S}^3 + 9\lambda^2F^2)\right].$$

Dans un faisceau de courbes du troisième ordre où se trouvent une courbe à rebroussement et une droite triple, il existe donc deux courbes à point double, puis une courbe harmonique, mais pas de courbe équianharmonique.

Si l'on a $u_y = 0$, toutes les courbes du faisceau (5) ont en y un point de rebroussement; donc les formes $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{G}$, F renfermeront individuellement le facteur u_y. Si l'on a inversement $\mathfrak{G} = 0$, les équations $\frac{T_{\varkappa\lambda}}{u^4\lambda} = 0$ et $\frac{R_{\varkappa\lambda}}{\varkappa^8\lambda^2} = 0$ admettent la racine $\lambda = 0$, c'est-à-dire qu'une courbe du faisceau voisine de $f = 0$ a également un point de rebroussement; par conséquent, $S_{\varkappa\lambda}$ doit aussi s'annuler pour cette courbe voisine, ce qui ne se présente que pour $\mathfrak{S} = 0$. Si donc $\mathfrak{G}$ est nul, on a aussi $\mathfrak{S} = 0$, et il vient $S_{\varkappa\lambda} = 0$ pour *toutes* les courbes du faisceau. Mais on a alors

$$R_{\varkappa\lambda} = 9\varkappa^8\lambda^2.\lambda^2F^2,\quad T_{\varkappa\lambda} = 3\varkappa^4\lambda.\lambda F.$$

L'équation $\frac{R_{\varkappa\lambda}}{\varkappa^8\lambda^2} = 0$ admet par suite la racine *double* $\lambda = 0$, et, puisque $S_{\varkappa\lambda}$ est aussi égal à zéro, $\frac{T_{\varkappa\lambda}}{\varkappa^4\lambda}$ deviendra un infiniment petit du second ordre pour $\lambda = 0$, c'est-à-dire que l'on aura aussi $F = 0$. Or on a, d'après les formules de Plücker, $F = u_\varphi^3 u_y^3$ si $u_\varphi^3 = 0$ désigne l'équation de $f = 0$ en coordonnées-lignes; $\mathfrak{G}$ admet le facteur u_y, et l'on a $F = 0$ lorsque $\mathfrak{G} = 0$; on peut donc poser $\mathfrak{G} = u_t^3 = v_y^3$ (¹).

On obtient ainsi ce théorème :

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que la courbe $f = 0$ possède un point de rebroussement sont $S = 0$ *et* $T = 0$. *Les*

(¹) On obtiendrait le même résultat en faisant usage, à peu près comme ci-dessus, des courbes (4) et du faisceau (9). Les courbes (4) ont dans le cas actuel chacune un point double en y et la tangente de rebroussement comme tangente commune en ce point. (CREMONA, *loc. cit.*)

coordonnées du point de rebroussement se déterminent par la proportion continue ($\mathfrak{S} = u_t^3$)

$$y_1^3 : y_1^2 y_2 : y_1^2 y_3 : \ldots : y_1 y_2 y_3 = t_{111} : t_{112} : t_{113} : \ldots : t_{123}.$$

La hessienne, d'après nos explications précédentes (p. 29), a nécessairement au point de rebroussement un point triple, et ce point est tel que deux de ses tangentes coïncident avec la tangente de rebroussement. Elle se compose donc, dans notre cas, de la tangente de rebroussement et de la ligne qui joint le point de rebroussement au *seul* point d'inflexion qui reste encore. On peut aisément, d'après cela, déterminer ce dernier point algébriquement lorsque les coordonnées du point de rebroussement sont connues, car on peut isoler de Δ le facteur $a_y a_x^2$; l'autre facteur linéaire donne alors immédiatement l'équation de la ligne de jonction précitée. Il n'existe pas alors de triangle inflexionnel *proprement dit* dans le faisceau $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$. En effet, dans le premier membre de l'équation $G(\varkappa, \lambda) = 0$, il ne reste plus, si $S = 0$ et $T = 0$, que le terme $\varkappa^4$; cette équation a donc quatre racines égales $\varkappa = 0$; le seul triangle ainsi déterminé est conséquemment la courbe Δ elle-même. Un système de coordonnées conforme à la nature du sujet et propre à l'établissement d'une *forme canonique* nous est d'ailleurs donné par les lignes suivantes (*voir* ci-après *fig.* 30) :

la ligne joignant le point de rebroussement et le point d'inflexion..	$x_2 = 0$
la tangente de rebroussement............................	$x_1 = 0$
la tangente d'inflexion.................	$x_3 = 0$

Sous le bénéfice de cette fixation, l'équation de la courbe prend la forme (*voir* p. 30)

$$(22) \qquad x_2^3 - 3x_1^2 x_3 = 0,$$

et l'équation de la hessienne devient, comme cela devait être,

$$\frac{1}{6}\Delta \equiv \begin{vmatrix} x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & x_2 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv -x_1^2 x_2 = 0.$$

La cayleyenne est enveloppée par les premières polaires des

points de la hessienne. Or la polaire d'un point z placé sur $x_1 = 0$ est

$$x_2^2 z_2 - x_1^2 z_3 = 0,$$

c'est-à-dire un couple de lignes dont le sommet est situé au point de rebroussement, et la polaire d'un point z de $x_2 = 0$ est

$$x_1(2x_3 z_1 - x_1 z_3) = 0,$$

c'est-à-dire un couple de lignes composé de la tangente de rebroussement fixe et d'une ligne mobile menée par le point de rencontre de cette dernière avec la tangente d'inflexion. Maintenant, comme tout point de $x_2 = 0$ compte doublement en tant que point de la hessienne, *la cayleyenne se compose du point de rebroussement compté deux fois et du point de rencontre de la tangente d'inflexion et de la tangente de rebroussement.*

On reconnaît immédiatement sur l'équation (22) que les points de la courbe peuvent s'exprimer en fonction d'un paramètre $\frac{\lambda}{\mu}$ de la manière suivante :

$$(23) \qquad \rho x_1 = \mu^3, \quad \rho x_2 = \mu^2 \lambda, \quad \rho x_3 = \lambda^3,$$

en mettant x_3 à la place de $x_3 \sqrt{3}$.

Avec le secours de cette représentation nous nous proposons, comme nous l'avons fait à l'égard des courbes à point double, de traiter quelques problèmes relatifs à la géométrie sur la courbe. Cette dernière est coupée par une droite u en trois points déterminés par l'équation

$$u_1 \mu^3 + u_2 \mu^2 \lambda + u_3 \lambda^3 = 0,$$

dans laquelle manque le terme multiplié par $\lambda^2 \mu$; *pour les paramètres de trois points situés sur une droite existe donc toujours la relation*

$$(24) \qquad \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} + \frac{\lambda_3}{\mu_3} = 0.$$

Cette relation, comparée à la relation (16) qui lui correspond dans les courbes à point double, est d'une nature essentiellement différente. Nous verrons plus tard, dans nos recherches générales sur les courbes du genre $p = 0$, la manière dont l'équation (24)

procède de l'équation (16) par des considérations de limites, cette dernière étant d'abord supposée sous la forme

$$\log\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right) + \log\left(\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right) + \log\left(\frac{\lambda_3}{\mu_3}\right) \equiv 0 \quad (\text{mod. } \pi i).$$

Si nous menons maintenant d'un point $\lambda_0 \left(= \frac{\lambda_0}{\mu_0}\right)$ la seule tangente encore possible à la courbe, tangente dont le point de contact peut être supposé en λ_1, puis de λ_1 la tangente dont le point de contact sera λ_2 et ainsi de suite, nous avons

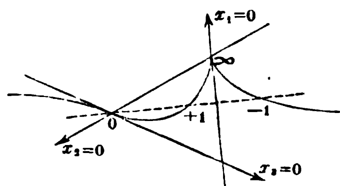
$$\lambda_0 + 2\lambda_1 = 0, \quad \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \quad \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \quad \ldots, \quad \lambda_{r-1} + 2\lambda_r = 0, \quad \ldots$$

ou

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}\lambda_0, \quad \lambda_2 = \frac{1}{4}\lambda_0, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{8}\lambda_0, \quad \ldots, \quad \lambda_r = \left(-\frac{1}{2}\right)^r \lambda_0, \quad \ldots.$$

Les paramètres deviennent donc de plus en plus petits et, si l'on continue le procédé, s'approchent indéfiniment de la valeur zéro qui correspond au point d'inflexion. *Par conséquent, si l'on continue de mener des tangentes d'un point quelconque à notre courbe du troisième ordre, le point de contact s'approche sans cesse du point d'inflexion.* Il est clair que l'on ne revient jamais au point de départ : on ne peut donc construire de cette manière aucun polygone fermé. A l'aide de la dernière proposition on peut sans peine représenter sensiblement la distribution des valeurs réelles du paramètre sur la courbe, comme le montre la *fig.* 30. Le point $\lambda_0 = 1$ peut ici

Fig. 30.



encore être choisi arbitrairement sur la courbe, et, partant de là, on peut facilement construire les points $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \cdots$ d'après notre théorème. Le paramètre parcourt sur l'un des deux chemins possibles entre le point d'inflexion et le point de rebroussement

(c'est-à-dire entre o et ∞) toutes les valeurs numériques positives, et sur l'autre toutes les valeurs négatives; il résulte au surplus de l'équation (24) que deux points auxquels appartiennent des valeurs paramétriques de signes contraires sont toujours en ligne droite avec le point d'inflexion $\lambda = 0$ (¹).

La construction du polygone de Steiner suivant la manière indiquée ne conduit ici à aucun résultat. Si nous partons en effet des points p, q, nous obtenons le système d'équations

$$\begin{array}{ll} p + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, & q + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ p + \lambda_3 + \lambda_4 = 0, & q + \lambda_4 + \lambda_5 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, \\ p + \lambda_{2n-1} + \lambda_{2n} = 0, & q + \lambda_{2n} + \lambda_1 = 0, \end{array}$$

ce qui entraîne $p = q$; on n'obtient donc pas alors de polygone proprement dit.

En vertu des formules de Plücker, il ne peut exister d'autres singularités concurremment avec le point double et le point de rebroussement sans que la courbe se décompose. Il est d'ailleurs intéressant d'établir d'une manière complète les conditions algébriques de cette décomposition, et c'est ce que nous essayerons de faire dans ce qui suit.

Si l'on impose à la courbe d'avoir deux points doubles, elle doit nécessairement se décomposer en une conique $s_x^2 = 0$ et en une droite coupant cette dernière en deux points séparés. On a donc

$$(25) \qquad f = a_x^3 = r_x s_x^2 = r_x s_x'^2 = \dots.$$

Nous avons vu qu'en cas de survenance d'un point double la forme Π devient le cube du premier membre de l'équation de ce

(¹) Il est du reste facile de se rendre semblablement compte de la distribution des valeurs du paramètre sur une courbe à point double. Il résulte de (8) qu'au point double (pour $\mu = 1$), suivant qu'il est considéré comme placé sur l'une ou sur l'autre branche de la courbe, répondent les valeurs $\lambda = 0$ ou $\lambda = \infty$, tandis que $\lambda = -1$ détermine le seul point d'inflexion réel; puis il suit de (9) que deux points ayant les valeurs paramétriques λ et $\frac{1}{\lambda}$ sont en ligne droite avec le point d'inflexion. La valeur $\lambda = +1$ donne, d'après (17), le point de contact de la seule tangente qu'on peut encore mener du point d'inflexion à la courbe, et ainsi de suite.

point double. Lorsqu'il surviendra un second point double, Π devra donc être identiquement nul, ce qui est confirmé par la réflexion suivante ([1]). Les invariants S et T ne s'évanouissent évidemment pas ici séparément, car autrement la courbe à deux points doubles se déduirait de la courbe à point de rebroussement par des considérations de limites, ce qui n'est pas possible (*voir* p. 349). Au contraire, la relation

$$\frac{1}{6}S^3 = T^2$$

subsiste comme en cas de simple point double. Maintenant, la forme $f = r_x s_x^2$ n'a plus que les deux invariants

$$i = (rss')^2 \quad \text{et} \quad j = (ss's'')^2.$$

L'évanouissement du second exprime la présence d'un troisième point double; S ne peut donc être proportionnel à j, parce que ce cas de $j = 0$ ne peut pas davantage se déduire de la présence d'un point de rebroussement. Si l'on a au contraire $i = 0$, la ligne r touche la conique; autrement dit, la cubique acquiert un point de rebroussement, et l'on aura encore $S = 0$, $T = 0$. Ces derniers invariants deviennent donc proportionnels à des puissances de i, et, comme S est du quatrième degré, la seule hypothèse possible est

$$S = ci^2, \tag{26}$$

c désignant un facteur numérique, d'où

$$T = \frac{1}{\sqrt{6}} c^{\frac{3}{2}} i^3 = \frac{1}{\sqrt{6}} c^{\frac{1}{2}} i S. \tag{27}$$

Comme, d'ailleurs, $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{T}$ dérivent de S et T par le procédé de différentiation $\sum \frac{\partial S}{\partial a_{ikh}} u_i u_k u_h$ (*voir* p. 284 et 295), et qu'on a

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{4} \sum \frac{\partial S}{\partial a_{ikh}} u_i u_k u_h, \quad \mathfrak{T} = \frac{1}{6} \sum \frac{\partial T}{\partial a_{ikh}} u_i u_k u_h,$$

[1] *Voir* GORDAN, *Ueber Curven dritter Ordnung mit zwei Doppelpunkten* (*Math. Annalen*, t. III), et GUNDELFINGER, *loc. cit.*

il en résulte, si l'on applique aussi ce procédé à $R = 0$,

(28) $$6T\mathfrak{T} - S^2\mathfrak{S} = 0 \quad \text{ou} \quad \sqrt{6}ci\mathfrak{T} = ci^2\mathfrak{S},$$

ou, après multiplication par $i\sqrt{c}$ dans les deux membres et en vertu de (26) et (27),

(29) $$\Pi \equiv T\mathfrak{S} - S\mathfrak{T} = 0.$$

Le fait que l'évanouissement identique de Π est également suffisant résulte de ce qu'il se produit sans supposer l'évanouissement de S et T, et que d'autre part, comme nous le verrons, il ne *suffit pas* pour causer la présence de trois points doubles, le point double, dans la circonstance où $R = 0$, étant d'ailleurs indéterminé.

On effectue la détermination du facteur numérique c en calculant directement, à l'aide de l'équation

$$3a_{ikh} = r_i s_{kh} + r_k s_{hi} + r_h s_{ik},$$

les conditions qui y sont relatives. Nous ne donnons ici que les résultats. On a

(30) $$\left\{\begin{aligned} 9\Theta &= 9(abu)^2 a_x b_x &&= 4r_x^2(ss'u)^2 - 2s_x(s'ru)^2 \\ &&&\quad + iu_x^2 - 4u_x r_x (rss')(ss'u), \\ 27\Delta &= 27(abc)^2 a_x b_x c_x &&= 4r_x^3 j - 3if, \\ 9\mathfrak{S} &= 9(\Theta cu)^2 c_\vartheta u_\vartheta &&= 2(rsu)^2(ss'u)(rss'), \\ 9\mathfrak{T} &= 9(\Theta\alpha u)^2 \alpha_\vartheta u_\vartheta &&= -i\mathfrak{S}, \\ 27S &= 27(\Theta cd)^2 c_\vartheta d_\vartheta &&= 2i^2, \\ 243T &= 243(\Theta\alpha d)^2 \alpha_\vartheta d_\vartheta &&= -2i^3 \quad (^1). \end{aligned}\right.$$

Au moyen de ces équations, nous trouvons immédiatement $c = \frac{2}{27}$ et ensuite

(31) $$S\Delta - Tf = \frac{8}{729} j i^2 r_x^3.$$

Nous avons donc le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe du troisième ordre se décompose en une conique et en une droite qui

---

(1) Il suit de là que dans (27) on doit prendre le signe négatif du radical.

la coupe est l'évanouissement identique de la forme

$$\Pi = \mathrm{TS} - \mathrm{S}\mathfrak{T};$$

les coordonnées de la droite se calculent alors au moyen de l'équation

$$r_1^3 : r_1^2 r_2 : r_1^2 r_3 : \ldots : r_1 r_2 r_3 = \sigma_{111} : \sigma_{112} : \sigma_{113} : \ldots : \sigma_{123},$$

dans laquelle (*en posant* $\Delta = \alpha_x^3$)

$$\sigma_{ikh} = \mathrm{S}\alpha_{ikh} - \mathrm{T}a_{ikh}.$$

Les coefficients de l'équation de la conique se trouvent en divisant par r_x dans f.

Il se produit une particularisation de plus si la conique est touchée par la droite. Alors on a

$$i \equiv (ss'r)^2 = 0;$$

donc, suivant (30), les invariants S et T s'évanouissent, comme cela doit être, puisque cette hypothèse provient du point de rebroussement par dégénération. Mais $\mathfrak{T}$ est aussi, d'après (30), identiquement nul si i s'annule, et il vient

$$(32) \qquad 27\alpha_x^3 = 27\Delta = 4r_x^3 j.$$

Nous voyons de plus par (30) que S devient égal (sauf un facteur numérique) à u_y^3, les quantités y_i étant les coordonnées du point de contact de r, car l'évanouissement de $(rsu)^2$ exprime que le point d'intersection de r et de u est situé sur $s_x^2 = 0$, et

$$(ss'u)(rss') = 0$$

est l'équation du pôle y de r, lequel se confond ici avec le point d'intersection dont il a été parlé. Donc :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe du troisième ordre se compose d'une conique et d'une droite tangente à cette dernière est l'évanouissement identique de $\mathfrak{T}$. Les coordonnées y_i du point de contact se déterminent au moyen de la proportion continue (S *étant égal à* u_s^3)

$$y_1^3 : y_1^2 y_2 : y_1^2 y_3 : \ldots : y_1 y_2 y_3 = s_{111} : s_{112} : s_{113} \ldots : s_{123},$$

et les coordonnées r_i de la tangente par

$$r_1^3 : r_1^2 r_2 : r_1^2 r_3 : \ldots : r_1 r_2 r_3 = \alpha_{111} : \alpha_{112} : \alpha_{113} : \ldots : \alpha_{123},$$

Δ étant égal à α_x^3.

Si la courbe du troisième ordre doit avoir trois points doubles, il faut que la conique s_x^2, dans le cas caractérisé par $\Pi \equiv 0$, se décompose en un couple de lignes, c'est-à-dire que l'on ait

$$j = 0$$

et

$$s_x^2 = p_x q_x, \quad f = r_x p_x q_x.$$

Alors tout point de la courbe est un point d'inflexion; Δ deviendra donc proportionnel à f, et, en effet, il résulte de (30) et (31), à cause de $j = 0$,

$$(33) \qquad 9\Delta = -if \quad \text{et} \quad S\Delta - Tf \equiv 0.$$

Pour la décomposition d'une courbe du troisième ordre en trois droites, il est donc nécessaire et suffisant que f soit proportionnel à Δ, c'est-à-dire que la forme mixte (voir p. 314)

$$N = (a\alpha u) a_x^2 \alpha_x^2$$

soit identiquement nulle. Les coordonnées p_i, q_i, r_i des trois droites se déterminent au moyen des équations

$$\rho(p_i q_k r_h + p_k q_h r_i + p_h q_i r_k) = 3 a_{ikh}.$$

Pour résoudre ces équations d'une manière effective, on peut procéder ainsi qu'il suit. Soient y et z deux points quelconques du plan; on déterminera les points $y + \lambda z$, où leur ligne de jonction rencontre la courbe $f \equiv a_x^3 = 0$, au moyen de l'équation du troisième degré

$$a_y^3 + 3\lambda a_y^2 a_z + 3\lambda^2 a_y a_z^2 + \lambda^3 a_z^3 = 0.$$

Nous désignerons les coordonnées de ces points par ξ, ξ', ξ'', de telle sorte que, λ, λ', λ'' étant les racines de l'équation précédente, on aura

$$\xi_i = y_i + \lambda z_i, \quad \xi'_i = y_i + \lambda' z_i, \quad \xi''_i = y_i + \lambda'' z_i.$$

Les tangentes de $f = 0$ aux points ξ, ξ', ξ'' coïncident alors

avec les trois droites en lesquelles f se décompose; autrement dit, les quantités p_i, q_i, r_i sont déterminées par les équations linéaires qui suivent [1] :

$$\rho p_i = a_\xi^2 a_i, \quad \rho q_i = a_{\xi'}^2 a_i, \quad \rho r_i = a_{\xi''}^2 a_i.$$

Il peut arriver en particulier que les trois lignes droites passent par un même point, c'est-à-dire que le déterminant (pqr) s'évanouisse. Nous avons alors aussi

$$i = (pqr)^2 = 0 \quad \text{et} \quad j = 0,$$

et par conséquent, d'après (30),

$$\mathfrak{E} = 0, \quad S = 0, \quad T = 0,$$

comme c'était à prévoir, car ce cas prend naissance lorsque, dans l'hypothèse définie par $\mathfrak{E} = 0$, la conique $s_x^2 = 0$ se décompose en un couple de lignes dont le sommet est situé sur $r_x = 0$. De (31) résulte d'ailleurs $\Delta = 0$, et, en effet, la polaire d'un point quelconque, d'après nos lois générales, se compose d'un couple de lignes dont le sommet est situé au point triple de $f = 0$, et par là on reconnaît géométriquement que la réciproque de notre dernière proposition est vraie [2].

La condition nécessaire et suffisante pour la décomposition de la courbe en trois droites d'un faisceau est donc donnée par l'évanouissement identique de Δ. Les coordonnées du point triple y se calculent au moyen de l'équation

$$F = (abu)^2 (cdu)^2 (acu)(bdu) = u_y^6.$$

Après les avoir trouvées, on introduit, pour déterminer les

---

(1) Lorsqu'une forme du $n^{\text{ième}}$ ordre se décompose en n facteurs linéaires, un procédé tout à fait analogue est naturellement applicable pour la détermination de ces facteurs.

(2) *Voir* SYLVESTER, *Cambridge and Dublin mathematical journal*, t. VII, p. 187 (1852). Le théorème a été étendu par HESSE (*Journal de Crelle*, *t.* 56, p. 263) aux courbes d'ordre quelconque : *Conséquemment une courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre se décompose en n droites passant par un point si son covariant hessien est identiquement nul.* Consultez SYLVESTER, *Philosophical Magazine*, 1853, et le travail de Gordan et Nöther cité, p. 97.

quantités p_i, q_i, r_i, de nouvelles variables au moyen des équations

$$\rho x_1 = y_1\xi_1 + a_1\xi_2 + b_1\xi_3,$$
$$\rho x_2 = y_2\xi_1 + a_2\xi_2 + b_2\xi_3,$$
$$\rho x_3 = y_3\xi_1 + a_3\xi_2 + b_3\xi_3,$$

les grandeurs a_i, b_i étant complètement arbitraires. Alors f devient une forme binaire en ξ_2, ξ_3 et peut, d'après la théorie des formes cubiques binaires, se représenter sous la forme

$$\xi_2^3 + \xi_3^3,$$

pourvu que l'on détermine convenablement les quantités a_i et b_i. On reconnaît d'ailleurs facilement que dans ce cas la forme S renfermant le facteur (pqr) est identiquement nulle.

Si, de plus, deux droites p et q se confondent, c'est-à-dire si l'on a

$$f = rq_x^2,$$

la courbe $f = 0$ est coupée par *toute* droite u en deux points coïncidents, et *conséquemment la forme* F *est identiquement nulle.* Nous pouvons alors, dans les équations (30), poser $s = s' = q$; nous avons par suite

$$(34)\qquad 9\Theta = -2q_x^2(qru)^2,$$

et *l'on peut tirer de là simultanément la droite double q et le point de rencontre de q et r.* Les choses se passent d'une manière analogue à ce qui arrive dans le cas de $N = 0$, sauf que l'équation cubique dont on se sert a ici deux racines égales.

Si enfin les trois droites se confondent, on a dans (34) $q_i = r_i$, d'où résulte identiquement

$$\Theta = (abu)^2 a_x b_x = 0 \quad (^1).$$

(¹) Ce résultat peut être généralisé et s'exprime alors par la proposition suivante :

Si pour une forme ternaire $f = a_x^n$ la forme mixte $\Theta = (abu)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2}$ est identiquement nulle, f est la $n^{ième}$ puissance d'une expression linéaire.

En effet, d'après le principe de translation (t. I, p. 342), la condition $\Theta = 0$ signifie que toute droite rencontre la courbe $f = 0$ en un groupe de points qui, considéré comme forme binaire, a son covariant hessien identiquement nul. Mais cela veut dire que le groupe binaire de points se compose d'un point compté n fois. C. Q. F. D.

De la condition $f = q_x^3$ on tire immédiatement pour le calcul des quantités q_i la proportion continue

$$q_1^3 : q_1^2 q_2 : q_1^2 q_3 : \ldots : q_1 q_2 q_3 = a_{111} : a_{112} : a_{113} : \ldots : a_{123}.$$

Pour finir, nous rassemblerons en abrégé dans le Tableau suivant les résultats que nous venons d'obtenir, en ajoutant pour chaque espèce de courbes le nombre de constantes qui restent encore arbitraires (¹).

COURBES DU TROISIÈME ORDRE.

1° *Courbe générale,* neuf constantes. Rapport anharmonique égal à α si l'on pose

$$\frac{S^3}{T^2} = \frac{(1 - \alpha + \alpha^2)^3}{(1 + \alpha)^2 (2 - \alpha)^2 (1 - 2\alpha)^2}.$$

a. Courbe équianharmonique, huit constantes :

$$S = 0, \quad 1 - \alpha + \alpha^2 = 0.$$

b. Courbe harmonique, huit constantes :

$$T = 0, \quad \alpha = -1,\ 2,\ \frac{1}{2}.$$

2° *Courbe à point double,* huit constantes :

$$R \equiv T^2 - \frac{1}{6} S^3 = 0, \quad \alpha = 1,\ 0,\ \infty.$$

3° *Conique et droite,* sept constantes :

$$\Pi \equiv S\mathfrak{T} - T\mathfrak{S} = 0.$$

4° *Trois droites séparées,* six constantes :

$$N \equiv (a\alpha u) a_x^2 \alpha_x^2 = 0.$$

5° *Courbe à point de rebroussement,* sept constantes :

$$S = 0, \quad T = 0.$$

(¹) *Voir* t. I, p. 149, le Tableau correspondant pour les coniques. Le Tableau actuel a été établi de telle manière que chacune des courbes C_3' peut être déduite de la précédente par des considérations de limites.

6° *Conique et tangente,* six constantes :

$$\mathfrak{T} = 0.$$

7° *Trois droites concourantes,* cinq constantes :

$$\alpha_x^3 \equiv \Delta = 0.$$

8° *Droite simple et droite double,* quatre constantes :

$$F = 0.$$

9° *Droite triple,* deux constantes :

$$\Theta \equiv (abu)^2 a_x b_x = 0.$$

Entre 8° et 9° nous pourrions encore intercaler une courbe dépendant de trois constantes, et qui serait composée d'une droite triple et d'un *sommet* situé sur elle. Mais une telle droite n'est pas représentable en coordonnées-points par une seule équation $f = 0$, et pour cette raison nous la négligerons pour commencer. Si l'on considère, au contraire, des systèmes de courbes du troisième ordre, on doit dans les dégénérations compter les sommets qui s'y présentent, quoique ceux-ci ne puissent être représentés isolément par une équation ponctuelle. Alors on obtient aussi pour les cas 8° et 9° cinq constantes, car, dans 8°, le point de rencontre des deux droites infiniment voisines qui se réunissent pour former la droite double sera complètement déterminé lorsqu'on aura poursuivi le passage à la limite; de telle sorte qu'un sommet est encore situé sur la droite. De même, sur la droite triple dans 9 peuvent se présenter trois sommets si l'on imagine qu'elle provient de trois droites particulières, et, au contraire, deux sommets seulement (dont l'un compte alors double) si on la déduit du cas 8.

Si l'on poursuit de la manière indiquée la naissance d'une dégénération d'une courbe générale, les tangentes d'inflexion et les tangentes de rebroussement auront des situations spéciales pour la courbe limite, situations qui, du reste, peuvent être différentes suivant le système de courbes C_3 dans lequel la dégénération se présente. Si, par exemple, C_3 se décompose en une conique et en une tangente de cette dernière courbe (cas qui peut se déduire d'une courbe à point de rebroussement), la courbe, comme figure tangentielle, se compose de la conique et du point de contact. Le

point de rebroussement et le point d'inflexion sont réunis en ce dernier, tandis que la tangente de rebroussement et la tangente d'inflexion se confondent avec la tangente de la conique. Mais, si la conique C_2 dégénère encore en une ligne double, la tangente de rebroussement et la tangente d'inflexion peuvent être représentées dans ce cas limite par deux droites séparées passant par le point de rencontre de la droite double avec la droite simple, de telle sorte, d'ailleurs, qu'il existe encore des relations entre ces quatre lignes et la droite qui se présente à la limite à la place de la ligne joignant le point de rebroussement et le point d'inflexion (¹). Si l'on compte les droites qui s'ajoutent ainsi à une courbe, en tant que celle-ci fait partie d'un système de courbes plus générales, comme lui appartenant essentiellement, le nombre des constantes dont dépend la dégénération est naturellement élevé dans la mesure correspondante.

VII. — Application de la théorie des fonctions elliptiques à la Géométrie sur une courbe du troisième ordre.

En traitant des courbes du troisième ordre à point double, nous avons vu que les coordonnées des points de la courbe peuvent s'exprimer rationnellement en fonction d'un paramètre et que cette représentation est particulièrement avantageuse pour l'étude de certains systèmes de points sur la courbe. Maintenant se présente la question de savoir si un procédé semblable est possible à l'égard d'une courbe générale du troisième ordre et ultérieurement à l'égard d'une courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre. *Un examen attentif montre que cela dépend du genre de la courbe.* Toute courbe du genre $p = 0$ est représentable rationnellement par un paramètre; au contraire, pour les courbes du genre $p = 1$ il, est nécessaire d'introduire les fonctions elliptiques dans ce mode de représentation. Nous démontrerons plus tard ces théorèmes d'une manière tout à fait générale; mais, en ce qui concerne les courbes générales du troisième ordre qui sont précisément du genre $p = 1$, nous

(¹) Ces circonstances ont été étudiées d'une manière complète par Schubert pour les dégénérations d'une cubique à point de rebroussement. Voir *Göttinger Nachrichten*, 1875, p. 359, et *Math. Annalen*, t. XIII.

pouvons démontrer directement l'exactitude de notre proposition et des conséquences qui en découlent; c'est ce dont nous allons nous occuper dans ce qui suit.

Nous partirons d'abord d'une forme spéciale d'équations des courbes du troisième ordre et nous montrerons sur elle le caractère du problème actuel. Nous étudierons en détail les relations possibles entre les points d'intersection d'une droite, relations qui donnent lieu à des questions de nature très diverse, et spécialement les polygones de Steiner, comme nous l'avons fait pour les courbes à point double. Pour les courbes d'ordre supérieur, au contraire, nous ne ferons qu'établir brièvement sur une base nouvelle les théorèmes qui nous sont connus relativement à leurs points d'intersection avec la courbe C_3. Enfin nous montrerons comment l'introduction des fonctions elliptiques peut être réalisée lorsqu'on suppose l'équation de C_3 donnée sous la forme la plus générale.

L'équation d'une courbe quelconque du troisième ordre peut être mise sous la forme

$$(1) \qquad F \equiv x_3^2 x_1 - x_2(x_1 - x_2)(k^2 x_1 - x_2) = 0.$$

Nous pouvons, en effet, montrer que le rapport anharmonique de cette courbe dépend précisément de la quantité k^2 et que, par suite, $F = 0$ représente bien la courbe la plus générale du troisième ordre. Pour $x_1 = 0$, l'équation (1) se transforme en $x_2^3 = 0$; l'axe de coordonnées $x_1 = 0$ coupe donc la courbe en trois points infiniment voisins: autrement dit $(x_1 = 0, x_2 = 0)$ est un point d'inflexion et $x_1 = 0$ est la tangente d'inflexion. Par ce point passent les trois droites

$$(2) \qquad x_2 = 0, \quad x_1 - x_2 = 0, \quad k^2 x_1 - x_2 = 0,$$

pour lesquelles l'équation de la courbe se transforme toujours en $x_3^2 x_1 = 0$. Ces trois droites sont donc les tangentes que l'on peut mener du point d'inflexion à la courbe, et $x_3 = 0$ est la droite sur laquelle sont situés leurs points de contact, c'est-à-dire la droite harmonique qui correspond au point d'inflexion. On reconnaît d'ailleurs immédiatement que k^2 est l'un des six rapports anharmoniques des trois droites (2) et de la tangente d'inflexion

$x_1 = 0$; c'est là le rapport anharmonique de la courbe du troisième ordre, lequel est lié de la manière connue avec l'invariant absolu de cette courbe [*voir* équation (41), p. 326].

Donc, pour obtenir l'équation d'une courbe quelconque du troisième ordre sous la forme (1), *il faut calculer la constante* k^2 *au moyen de l'équation* (¹)

$$(3) \qquad \frac{S^3}{T^2} = 24 \frac{(1-k^2+k^4)^3}{(1+k^2)^2(2-k^2)^2(1-2k^2)^2},$$

S *et* T *étant les invariants de la courbe.*

Maintenant l'équation (1) est satisfaite identiquement si nous posons

$$\rho x_1 = \mu^3, \quad \rho x_2 = \mu, \quad \rho x_3 = \sqrt{(1-\mu^2)(1-k^2\mu^2)};$$

l'introduction des fonctions elliptiques se trouve ainsi naturellement amenée. En prenant, en effet, $\mu = \sin \mathrm{am}\, u$ ou

$$(4) \qquad u = \int_0^\mu \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}},$$

il vient immédiatement

$$\sqrt{1-\mu^2} = \cos \mathrm{am}\, u, \quad \sqrt{1-k^2\mu^2} = \Delta \mathrm{am}\, u.$$

Les radicaux des premiers membres, devant être pris avec un signe déterminé, n'ont par conséquent qu'une valeur et les rela-

(¹) Les six racines de cette équation peuvent s'exprimer rationnellement en fonction de l'une d'elles (k^2) ; elles sont, comme on sait (*voir* t. I, p. 49),

$$k^2, \quad \frac{1}{k^2}, \quad 1-k^2, \quad \frac{1}{1-k^2}, \quad \frac{k^2-1}{k^2}, \quad \frac{k^2}{k^2-1}.$$

L'équation (3) est donc résoluble algébriquement, et, en effet, au moyen de la substitution $\frac{p}{q} = \frac{(k^2-1)^2}{(k^2+1)^2}$, elle dérive de l'équation du troisième degré

$$\frac{S^3}{T^2} = \frac{2}{3} \frac{(3p+q)^3}{q(\frac{1}{3}q-3p)^2}.$$

Voir plus haut la *Théorie des formes binaires biquadratiques*, t. I, p. 296 et suiv.

tions connues

$$\sin^2 \operatorname{am} u + \cos^2 \operatorname{am} u = 1,$$
$$k^2 \sin^2 \operatorname{am} u + \Delta^2 \operatorname{am} u = 1$$

sont satisfaites.

Les coordonnées d'un point de la courbe (1) $F = 0$ *sont donc représentées sans ambiguïté comme fonctions elliptiques d'un paramètre u par les équations*

$$(5) \qquad \begin{cases} \rho x_1 = \sin^2 \operatorname{am} u, \\ \rho x_2 = \sin \operatorname{am} u, \\ \rho x_3 = \cos \operatorname{am} u \, . \, \Delta \operatorname{am} u. \end{cases}$$

A chaque valeur de u répond ainsi un point x complètement déterminé sur la courbe.

Mais, inversement, à chaque point x ne répond pas une valeur *unique* de u, ainsi qu'il ressort des propriétés périodiques des fonctions elliptiques. L'intégrale (4) a, en effet, comme on sait, deux modules de périodicité Ω et Ω', définis comme étant les valeurs de l'intégrale prise sur les deux sections obliques de la surface de Riemann correspondante, et qui, pour la forme normale de l'intégrale de première espèce, sont donnés de la manière suivante par les intégrales rectilinéaires

$$(6) \qquad \Omega = 4\int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}}, \quad \Omega' = 2\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}} - 2\int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}},$$

$R(\lambda)$ étant égal à $(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)$.

Si maintenant u est une valeur de l'intégrale (4), toutes les autres valeurs de celle-ci diffèrent de u de multiples entiers de Ω et Ω', c'est-à-dire sont de la forme

$$u + p\Omega + q\Omega',$$

p et q désignant des nombres entiers. Ces modules de périodicité sont en même temps des périodes pour la fonction sin am, c'est-à-dire qu'on a les équations

$$\sin \operatorname{am}(u \pm \Omega) = \sin \operatorname{am}(u \pm \Omega') = \sin \operatorname{am} u,$$

tandis que Ω et $2\Omega'$ fournissent des périodes communes aux trois

fonctions $\sin \operatorname{am} u$, $\cos \operatorname{am} u$, $\Delta \operatorname{am} u$. Pour les rapports des quantités x_i, on tire déjà les mêmes valeurs de (5) si l'on fait croître l'argument de $\frac{1}{2}\Omega$ ou Ω' seulement, car on a aussi

$$\begin{aligned}
\sin \operatorname{am}(u \pm \Omega') &= \sin \operatorname{am} u, & \sin \operatorname{am}\left(u \pm \frac{\Omega}{2}\right) &= -\sin \operatorname{am} u, \\
\cos \operatorname{am}(u \pm \Omega') &= -\cos \operatorname{am} u, & \cos \operatorname{am}\left(u \pm \frac{\Omega}{2}\right) &= -\cos \operatorname{am} u, \\
\Delta \operatorname{am}(u \pm \Omega') &= -\Delta \operatorname{am} u, & \Delta \operatorname{am}\left(u + \frac{\Omega}{2}\right) &= \Delta \operatorname{am} u.
\end{aligned}$$

A tout point x de la courbe correspond donc une infinité de valeurs de l'argument, valeurs qui sont composées avec l'une d'entre elles (u) sous la forme

$$u + \frac{p}{2}\Omega + q\Omega',$$

p, q étant des nombres entiers, ou, si nous voulons nous exprimer ainsi, *la courbe a les périodes*

$$\omega = \frac{1}{2}\Omega \quad \text{et} \quad \omega' = \frac{1}{2}\Omega'. \tag{7}$$

La circonstance que l'intégrale elliptique de première espèce u se présente ici sous la forme normale connue est une conséquence de la position spéciale de notre triangle de coordonnées; en général, il n'en est pas ainsi. Mais on peut ramener toutes les intégrales de première espèce à l'une d'elles, et il est en effet connu, par la théorie des fonctions elliptiques, que toutes les intégrales de même module k peuvent être transformées linéairement les unes dans les autres. Ce fait est lié, comme une étude générale nous l'apprendra plus tard, avec la circonstance que la courbe du troisième ordre est du genre $p = 1$ et ne possède qu'un invariant absolu. En prenant pour point de départ la forme normale (4), nous pouvons aisément suivre dans ses détails la distribution des valeurs de l'intégrale sur les points de la courbe, ainsi que nous le verrons plus tard. C'est à quoi conduisent les développements suivants, qui nous donneront en même temps lieu de traiter d'autres questions importantes en elles-mêmes.

Soient u_1, u_2, u_3 les valeurs du paramètre pour trois points

situés sur une droite, et posons, pour abréger,

$$\sin\operatorname{am} u_i = s_i, \quad \cos\operatorname{am} u_i = c_i, \quad \Delta\operatorname{am} u_i = \Delta_i;$$

alors, en vertu de (5), existe la relation

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} s_1^3 & s_2^3 & s_3^3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ c_1\Delta_1 & c_2\Delta_2 & c_3\Delta_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Mais cette équation exprime simplement ceci : que la somme des arguments u_1, u_2, u_3 est nulle ou est égale à un multiple entier des périodes de notre courbe. La manière la plus simple de le vérifier consiste à mettre les équations relatives au théorème d'addition des fonctions elliptiques sous la forme donnée par Hermite [1]. On a alors

$$(9) \qquad \sin\operatorname{am}(u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n}) = \frac{\pm\varphi(0)}{s_1 s_2 \ldots s_{2n}},$$

$\varphi(u)$ étant la fonction suivante de $s = \sin\operatorname{am} u$, $c = \cos\operatorname{am} u$, $\Delta = \Delta\operatorname{am} n$:

$$(10) \qquad \begin{cases} \varphi(u) = s(s^{2n} + p_1 s^{2n-2} + p_2 s^{2n-4} + \ldots + p_n) \\ \qquad\qquad + c\Delta(q_1 s^{2n-2} + q_2 s^{2n-4} + \ldots + q_n). \end{cases}$$

Les $2n$ constantes p_i, q_i se déterminent par les $2n$ équations linéaires

$$(11) \qquad \varphi(u_1) = 0, \quad \varphi(u_2) = 0, \quad \varphi(u_3) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi(u_{2n}) = 0.$$

Le signe de l'expression qui figure dans le second membre de (9) se déterminera par un cas particulier, en posant par exemple $u_2 = u_3 = \ldots = u_{2n} = 0$, ce qui le transforme en $+\sin\operatorname{am} u_1$.

Si nous posons en particulier $n = 2$ et $u_{2n} = 0$, l'équation (9) donne la valeur de

$$\sin\operatorname{am}(u_1 + u_2 + u_3),$$

et les équations (10) et (11), qui servent à déterminer la fonc-

---

(1) HERMITE, *Note sur le Calcul différentiel et le Calcul intégral* (Extrait de la 6e édit. de l'Ouvrage de Lacroix, Paris, 1862, p. 68); *voir* aussi KOENIGSBERGER, *Theorie der elliptischen Functionen*, IIe Partie, Leipzig, 1874, p. 16.

tion $\varphi(u)$, donnent $q_2 = 0$ et

$$\begin{aligned}
\varphi(u) &= s^5 + p_1 s^3 + p_2 s + c\,\Delta\, q s^2,\\
0 &= s_1^5 + p_1 s_1^3 + p_2 s_1 + c_1 \Delta_1 q s_1^2,\\
0 &= s_2^5 + p_1 s_2^3 + p_2 s_2 + c_2 \Delta_2 q s_2^2,\\
0 &= s_3^5 + p_1 s_3^3 + p_2 s_3 + c_3 \Delta_3 q s_3^2,
\end{aligned}$$

d'où, en résolvant et observant que le déterminant du dénominateur n'est pas nul,

$$\frac{\varphi(u)}{s} = \frac{\begin{vmatrix} s^4 & s^2 & 1 & c\,\Delta\,s \\ s_1^4 & s_1^2 & 1 & c_1\Delta_1 s_1 \\ s_2^4 & s_2^2 & 1 & c_2\Delta_2 s_2 \\ s_3^4 & s_3^2 & 1 & c_3\Delta_3 s_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_1^2 & 1 & c_1\Delta_1 s_1 \\ s_2^2 & 1 & c_2\Delta_2 s_2 \\ s_3^2 & 1 & c_3\Delta_3 s_3 \end{vmatrix}}.$$

Si pour former l'équation (9) nous posons $u = 0$, comme on a alórs $\sin\operatorname{am} 0 = 0$, $\cos\operatorname{am} 0 = \Delta\operatorname{am} 0 = 1$, il vient dans le premier membre $\frac{\varphi(0)}{0}$ et nous obtenons, puisqu'on a aussi $u_{2n} = u_4 = 0$,

$$\sin\operatorname{am}(u_1 + u_2 + u_3) = \frac{\begin{vmatrix} s_1^3 & s_1 & c_1\Delta_1 \\ s_2^3 & s_2 & c_2\Delta_2 \\ s_3^3 & s_3 & c_3\Delta_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_1^2 & 1 & c_1\Delta_1 s_1 \\ s_2^2 & 1 & c_2\Delta_2 s_2 \\ s_3^2 & 1 & c_3\Delta_3 s_3 \end{vmatrix}}.$$

Ici figure dans le numérateur le déterminant dont l'évanouissement exprime, suivant (8), que les trois points ayant pour paramètres u_1, u_2, u_3 sont en ligne droite. Comme maintenant le dénominateur du second membre ne peut s'annuler en même temps que le numérateur que pour des valeurs spéciales des arguments u_1, u_2, u_3, tandis que notre équation a lieu pour toute valeur de ces quantités, il résulte de (8)

$$\sin\operatorname{am}(u_1 + u_2 + u_3) = 0$$

ou

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0,$$

le signe $\equiv$ devant indiquer que la somme qui figure dans le premier membre est égale à zéro, ou bien ne diffère de zéro que par une expression de la forme $p\omega + q\omega'$; p et q sont supposés être des nombres entiers, et ω et ω' désignent les deux périodes de notre courbe telles qu'elles ont été définies par (6) et (7).

Nous formulerons ce résultat dans la proposition suivante :

Si l'on représente les points d'une courbe du troisième ordre au moyen des équations (5) *comme fonctions elliptiques d'un paramètre* [1], *la somme des arguments relatifs aux points d'intersection d'une droite avec la courbe satisfait toujours à la congruence*

$$(12) \qquad u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0 \pmod{\omega, \omega'}.$$

A cette équation nous rattacherons la résolution d'une série de problèmes que nous avons déjà en partie traités par d'autres méthodes. Si nous faisons d'abord coïncider deux des points, de telle sorte que la droite devienne une tangente, nous aurons

$$(13) \qquad 2u_1 + u_2 \equiv 0$$

ou

$$u_1 = -\frac{u_2}{2} + \frac{p\omega + q\omega'}{2},$$

p, q étant des nombres entiers. Il suffit de prendre p, q égaux à zéro et -1, parce que tout nombre plus élevé peut être obtenu par addition de multiples entiers des périodes. Donc :

Les arguments des points de contact des quatre tangentes que l'on peut mener d'un point u de la courbe à cette dernière sont

$$(14) \qquad -\frac{u}{2},\quad -\frac{u+\omega}{2},\quad -\frac{u+\omega'}{2},\quad -\frac{u+\omega+\omega'}{2},$$

et, inversement, le point tangentiel u d'un point v de la courbe est déterminé par

$$u \equiv -2v \pmod{\omega, \omega'}.$$

---

[1] Ce théorème est d'ailleurs, comme il sera démontré plus tard, indépendant de la forme des équations (5). La représentation doit seulement être dirigée de telle manière qu'au paramètre $u = 0$ corresponde un point d'inflexion; autrement le second membre de (12), au lieu d'être nul, contiendrait une constante (*voir* p. 391 et suiv.).

En ayant égard aux relations des quatre points de contact à l'égard des trois systèmes de couples de pôles qui sont sur la courbe (p. 262), nous pouvons aussi énoncer la première partie de ce théorème de la manière suivante :

Les arguments des trois points qui, dans les trois systèmes de couples de pôles, forment un couple avec un point u de la courbe, sont

$$(15) \qquad u + \frac{\omega}{2}, \quad u + \frac{\omega'}{2}, \quad u + \frac{\omega + \omega'}{2}.$$

Si maintenant nous joignons le point u à un point quelconque v, l'argument w du troisième point d'intersection de cette ligne de jonction est déterminé par $w \equiv -u - v$. Mais le même argument s'obtient pour le troisième point d'intersection de la ligne qui joint $u + \frac{\omega}{2}$ à $v + \frac{\omega}{2}$, tandis que les lignes joignant u à $v + \frac{\omega}{2}$ et v à $u + \frac{\omega}{2}$ se coupent au point dont l'argument est $w + \frac{\omega}{2}$. De là résulte le théorème connu (p. 259) :

Les lignes qui joignent deux points non correspondants de deux couples de pôles du même système se coupent sur la courbe en deux points qui forment un troisième couple du système en question.

On vérifie du reste sur (14) l'exactitude des remarques faites précédemment sur la réalité des trois systèmes de couples de pôles (p. 262). Si en effet la courbe est bipartite, les quatre tangentes sont réelles, et il en est de même de leur rapport anharmonique k^2; or ce dernier peut toujours être pris plus petit que l'unité, parce que, dans le cas contraire, il y a toujours une de ses cinq autres valeurs moindre que 1. Alors, comme on le sait d'après (6), Ω est réel et Ω' imaginaire sans partie réelle $(i = \sqrt{-1})$:

$$2\omega = \Omega = 4K, \quad \omega' = \Omega' = 2iK',$$

en posant (pour $k'^2 = 1 - k^2$)

$$K = \int_0^1 \frac{d\lambda}{(\sqrt{1-\lambda^2})(\sqrt{1-k^2\lambda^2})}, \quad K' = \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k'^2\lambda^2)}}.$$

Le premier des arguments (15) est par conséquent réel; mais

l'introduction des autres arguments dans les valeurs des coordonnées [équation (5)] donne aussi pour ces dernières des valeurs réelles, car on a, pour $k'^2 = 1 - k^2$,

$$\sin\operatorname{am}\left(u \pm \frac{\omega}{2}\right) = \pm \frac{\cos\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u}, \qquad \sin\operatorname{am}\left(u \pm \frac{\omega'}{2}\right) = \frac{1}{k\sin\operatorname{am} u},$$

$$\cos\operatorname{am}\left(u \pm \frac{\omega}{2}\right) = \mp \frac{k'\sin\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u}, \qquad \cos\operatorname{am}\left(u \pm \frac{\omega'}{2}\right) = \mp \frac{i\,\Delta\operatorname{am} u}{k\sin\operatorname{am} u},$$

$$\Delta\operatorname{am}\left(u + \frac{\omega}{2}\right) = \frac{k'}{\Delta\operatorname{am} u}, \qquad \Delta\operatorname{am}\left(u \pm \frac{\omega'}{2}\right) = \mp \frac{i\cos\operatorname{am} u}{\sin\operatorname{am} u},$$

$$\sin\operatorname{am}\left(u \pm \frac{\omega + \omega'}{2}\right) = \pm \frac{\Delta\operatorname{am} u}{k\cos\operatorname{am} u},$$

$$\cos\operatorname{am}\left(u \pm \frac{\omega + \omega'}{2}\right) = - \frac{ik'}{k\cos\operatorname{am} u},$$

$$\Delta\operatorname{am}\left(u \pm \frac{\omega + \omega'}{2}\right) = \pm \frac{ik'\sin\operatorname{am} u}{\cos\operatorname{am} u}.$$

Si au contraire la courbe est unipartite, le rapport anharmonique k^2 devient complexe (il a d'ailleurs pour module l'unité), et l'on reconnaît par les dernières équations que le point dont l'argument est $u + \frac{\omega}{2}$ a seul des coordonnées réelles.

Si dans (12) nous faisons les trois arguments égaux entre eux, nous obtenons la condition d'un point d'inflexion

$$3u \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, \omega,\, \omega'),$$

ou, p, q étant des nombres entiers,

$$u \equiv \frac{p\omega + q\omega'}{3}. \tag{16}$$

Le problème de la détermination des points d'inflexion est conséquemment, lorsqu'un de ces points ($u \equiv 0$) *est connu, identique au problème que l'on appelle problème de la trisection* spéciale *des fonctions elliptiques.* Ce dernier dépend donc d'une équation du quatrième degré, laquelle n'est autre que l'équation $G(x, \lambda) = 0$, qui sert à déterminer les points d'inflexion, ainsi que nous le verrons encore plus tard [1]. *Les arguments des neuf points d'in-*

---

[1] *Voir* la fin de cette Section et de la Section suivante.

flexion sont donc

$$0,\ \frac{\omega}{3},\ \frac{\omega'}{3},\ \frac{\omega+\omega'}{3},\ \frac{2\omega}{3},\ \frac{2\omega'}{3},\ \frac{\omega+2\omega'}{3},\ \frac{2\omega+\omega'}{3},\ \frac{2\omega+2\omega'}{3}.$$

Sont toujours situés en ligne droite les points d'inflexion pour les arguments desquels la somme des quantités p, aussi bien que celle des quantités q, est divisible par 3. Si donc on range les couples de valeurs p, q comme les éléments d'un déterminant dans le Tableau

0,0	0,1	0,2
1,0	1,1	1,2
2,0	2,1	2,2,

seront situés sur une droite les points qui appartiennent à la même ligne horizontale ou à la même ligne verticale et enfin ceux qui, dans le déterminant, apparaîtraient multipliés les uns par les autres. Nous avons par conséquent, pour le groupement des points d'inflexion, sans autre observation, les mêmes règles que celles obtenues par une autre voie (p. 232), et, en effet, notre Tableau concorde entièrement avec celui que nous avons établi alors; mais les nombres employés ont acquis, par nos considérations actuelles, une signification immédiatement saisissable : ce sont les valeurs des nombres p, q dans (16). On reconnaît au surplus qu'il existe toujours trois points d'inflexion sur une courbe réelle, et trois seulement, à savoir ceux qui sont donnés par les valeurs 0, $\frac{1}{3}\omega$, $\frac{2}{3}\omega$ du paramètre. On peut conclure de là que les arguments des points de la branche à trois inflexions peuvent tous être représentés sous la forme $\frac{m}{n}\omega$, m et n désignant des nombres réels; on peut aussi obtenir directement la distribution de ces valeurs de l'argument en continuant le tracé des tangentes. En premier lieu, les points de contact des tangentes issues d'un point d'inflexion $\frac{p\omega+q\omega'}{3}$ sont, d'après (14), donnés par

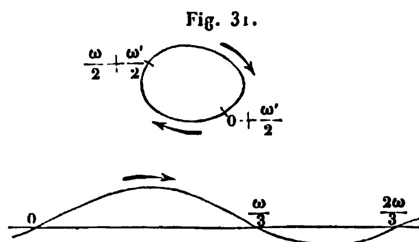
$$(17)\quad \begin{cases} -\dfrac{p\omega+q\omega'}{6}, & -\dfrac{(p+3)\omega+q\omega'}{6}, \\ -\dfrac{p\omega+(q+3)\omega'}{6}, & -\dfrac{(p+3)\omega+(q+3)\omega'}{6}. \end{cases}$$

En portant dans ces expressions les valeurs de p, q, on reconnaît que l'un de ces points tombe de nouveau au point d'inflexion en question ; par exemple, pour $p = 1$, $q = 0$, on obtient, en augmentant des périodes ω et ω' tous les arguments,

$$\frac{5}{6}\omega, \quad \frac{1}{3}\omega, \quad \frac{5}{6}\omega + \frac{1}{2}\omega', \quad \frac{1}{3}\omega + \frac{1}{2}\omega'.$$

Donc, parmi les trois points de contact, un seul $\left(\frac{5}{6}\omega\right)$ est sur la même branche que le point d'inflexion $\frac{1}{3}\omega$; les deux autres, au contraire, sont situés sur l'ovale. Nous pouvons en conclure que les arguments des points de ce dernier sont toujours de la forme $m\omega + \frac{1}{2}\omega'$, m étant un nombre réel, et nous obtenons ainsi, en continuant ce tracé de tangentes, un criterium pour la distribution des valeurs de l'argument sur les branches réelles de la courbe, comme le montre la *fig.* 31. *Sur la branche à trois inflexions se trouvent, comme il a été dit, les valeurs* $u = 0$ *jusqu'à* $u = \omega$, *sur l'ovale les valeurs* $u = 0 + \frac{1}{2}\omega'$ *jusqu'à* $u = \omega + \frac{1}{2}\omega'$.

Fig. 31.



La distribution des paramètres pour les points réels de la courbe est seule donnée par là ; à l'égard des points imaginaires, la question est de savoir si une interprétation semblable est possible. Or il en est effectivement ainsi, si l'on emploie le mode de représentation introduit par Klein (¹). Cette représentation des éléments imaginaires de la courbe se rattache à la conception de celle-ci comme figure enveloppée par ses tangentes ; nous raisonnerons

(¹) F. Klein, *Ueber eine neue Art der Riemann'schen Flächen* (*Math. Annalen*. t. VII, p. 558).

donc, dans ce qui suit, sur une courbe de la troisième classe au lieu de raisonner sur une courbe du troisième ordre.

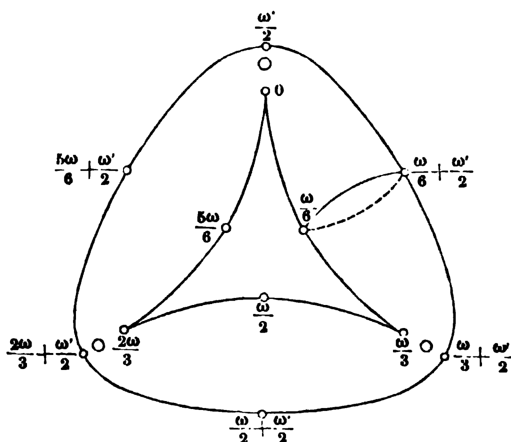
Considérons d'abord ce qui arrive, dans cet ordre de faits, pour une conique. A toute tangente de cette courbe, comme au surplus de toute courbe algébrique, et que la tangente dont il s'agit soit du reste réelle ou imaginaire, on peut en général faire correspondre *un* point réel du plan. Si la tangente est réelle, nous choisirons comme point correspondant le point de contact; si elle est imaginaire, nous choisirons le seul point réel qu'elle possède. Les deux fixations concordent l'une avec l'autre en ce sens que celle qui se rapporte aux tangentes réelles dérive de l'autre par passage à la limite, car le point réel d'une tangente imaginaire est le point de rencontre de celle-ci avec la droite imaginaire conjuguée, et, si ces deux lignes conjuguées se réunissent de manière à en former une réelle, leur point de rencontre devient le point de contact de cette dernière droite. Soit maintenant, pour commencer, une conique réelle que nous supposerons être une *ellipse*. De tout point extérieur à la courbe on peut lui mener deux tangentes réelles, et de tout point intérieur, au contraire, deux tangentes imaginaires conjuguées. Il existe donc toujours *deux* tangentes imaginaires conjuguées auxquelles correspond le même point réel. *Les points réels qui correspondent aux tangentes imaginaires de l'ellipse remplissent donc deux fois l'intérieur de celle-ci; ils constituent une surface ayant la forme d'une double feuille ellipsoïdique.* En parlant ici d'une double feuille, nous imaginons que tous les points de l'intérieur soient réunis en une feuille, une fois en tant qu'ils répondent à une tangente $G + iH = 0$ et une fois en tant qu'ils répondent à une tangente $G - iH = 0$. Maintenant cette double feuille nous représente l'ensemble des tangentes imaginaires de l'ellipse, c'est-à-dire la distribution des valeurs complexes d'un paramètre dont ces tangentes dépendent rationnellement. Les deux feuilles sont liées l'une à l'autre par des points réels de l'ellipse.

Des réflexions semblables peuvent être faites en ce qui concerne une *courbe de troisième classe*. Une telle courbe se compose, comme on sait, ou bien de deux branches fermées, dont l'une est tricuspidale et l'autre ovale, ou bien d'une branche tricuspidale unique (p. 242). Nous considérons ici seulement le premier cas. Nous pouvons représenter les tangentes aux courbes de l'espèce

en question comme fonctions elliptiques d'un paramètre, de la même manière que les points d'une courbe bipartite du troisième ordre, c'est-à-dire que l'une des périodes de l'intégrale elliptique correspondante de première espèce est réelle, l'autre purement imaginaire (p. 363), et, par conséquent, la distribution des paramètres pour les tangentes réelles des deux branches est la même, sauf l'interversion dualistique, que dans la *fig.* 31.

Si donc nous attribuons à un point de la courbe de troisième classe la valeur d'argument de sa tangente, nous obtenons la distribution des paramètres représentée dans la *fig.* 32. Le long de

Fig. 32.



la branche à trois rebroussements, les nombres réels, depuis o jusqu'à ω, sont répartis de telle manière qu'aux trois rebroussements répondent les arguments o, $\frac{1}{3}\omega$, $\frac{2}{3}\omega$, et les trois tangentes de rebroussement correspondantes coupent encore la courbe en trois points qui correspondent aux tangentes issues des points d'inflexion de la courbe du troisième ordre et qui ont, par suite, les arguments suivants :

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{2}\omega, & \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{2}\omega', & 0 + \frac{1}{2}\omega', \\ \frac{5}{6}\omega, & \frac{5}{6}\omega + \frac{1}{2}\omega', & \frac{1}{3}\omega + \frac{1}{2}\omega', \\ \frac{1}{6}\omega, & \frac{1}{6}\omega + \frac{1}{2}\omega', & \frac{2}{3}\omega + \frac{1}{2}\omega'. \end{array}$$

Pour les points de l'ovale circonscrivant, la partie imaginaire de l'argument a uniformément la valeur constante $\frac{1}{2}\omega'$, tandis qu'elle est nulle pour les points de la branche tricuspidale.

En ce qui concerne les tangentes *imaginaires* de la courbe, on a la règle suivante. De tout point extérieur à l'ovale, de même que de tout point intérieur à la branche tricuspidale on peut, comme l'apprend un coup d'œil sur la figure, mener trois tangentes réelles à la courbe ; au contraire, les points réels qui correspondent à des tangentes imaginaires conjuguées de la courbe, et desquels ne part plus conséquemment qu'une seule tangente réelle à la courbe, occupent deux fois l'espace entre les deux branches. Si, d'après cela, nous supposons ces points, comme dans l'ellipse, distribués sur deux feuilles s'étendant sur le plan entre les deux branches de courbe et liées entre elles le long de ces deux branches, *elles forment une sorte de surface annulaire,* c'est-à-dire une surface qui peut être transformée en un anneau ordinaire par déformation continue (¹). A tout point de cette surface répond une valeur complexe de l'argument u et au point superposé de l'autre feuille la valeur imaginaire conjuguée. En particulier se trouvent aux trois places marquées sur la *fig.* 32 par de petits cercles les points de la surface qui représentent les six tangentes de rebroussement qui sont conjuguées imaginairement par couples, points auxquels appartiennent par suite les arguments suivants,

$$0 \pm \frac{1}{3}\omega', \quad \frac{1}{3}\omega \pm \frac{1}{3}\omega', \quad \frac{2}{3}\omega \pm \frac{1}{3}\omega',$$

car ces points sont nécessairement situés symétriquement entre

(¹) La surface construite par nous a la même composition qu'une surface annulaire et par conséquent aussi que la surface de Riemann qui sera utilisée pour l'étude des fonctions elliptiques. Or on peut généralement remplacer directement cette dernière par notre surface annulaire et suivre sur celle-ci les contours d'intégration des intégrales elliptiques ; c'est, sous bien des rapports, plus clair et plus commode. Les deux périodes de cette intégrale prennent naissance par le fait que l'on peut adjoindre d'une manière quelconque des courbes méridiennes et des courbes de latitude au contour d'intégration conduit entre des limites déterminées. Du nombre relatif à la composition de la surface annulaire on peut d'ailleurs conclure, à la manière de Riemann, que la courbe de troisième classe est de genre 1. Un fait analogue a lieu pour les courbes supérieures. *Voir* Klein (*loc. cit.*).

les couples de points zéro et $o + \frac{1}{2}\omega'$, $\frac{1}{3}\omega$ et $\frac{1}{3}\omega + \frac{1}{2}\omega'$, $\frac{2}{3}\omega$ et $\frac{2}{3}\omega + \frac{1}{2}\omega'$.

Sur la surface il existe deux systèmes de courbes ayant une grande importance ; nous les désignerons par les noms de *courbes méridiennes* et de *courbes de latitude;* elles sont définies par la propriété que le long de leur contour la partie imaginaire et la partie réelle de l'argument ont respectivement une valeur constante. Les courbes méridiennes (suivant une observation que nous ne pouvons présenter que très brièvement ici) seront formées par les tangentes de la branche tricuspidale, c'est-à-dire, seront déterminées sur la surface annulaire par la rencontre d'un plan mené par une tangente semblable perpendiculairement au plan du tableau. Une courbe de cette espèce est indiquée dans la *fig.* 32, par le trait qui joint les points $\frac{1}{6}\omega$ et $\frac{1}{6}\omega + \frac{1}{2}\omega'$. Les courbes de latitude, sur lesquelles la partie imaginaire de l'argument est constante, courent en un sens perpendiculairement aux courbes méridiennes ; à elles appartiennent en particulier les deux branches réelles de la courbe elle-même, puisque sur l'ovale la partie imaginaire est constamment égale à $\frac{1}{2}\omega'$ et qu'elle est constamment nulle sur la branche tricuspidale. Un examen attentif apprend ensuite que deux courbes de latitude pour lesquelles les valeurs imaginaires constantes diffèrent de $\frac{1}{2}\omega'$ forment ensemble les deux branches réelles d'une courbe algébrique du genre $p = 1$ (¹).

(¹) Ces courbes sont d'ailleurs caractérisées par les propriétés énoncées dans les théorèmes suivants :

Le rapport anharmonique des quatre points de rencontre réels de chaque courbe avec les tangentes à la branche tricuspidale de la courbe primitive est constant. Les courbes de latitude forment partie d'un système de courbes obtenu en construisant sur chaque tangente de la courbe de troisième classe la forme hessienne H *et le faisceau* $\varkappa f + \lambda H$ *relatifs à la forme binaire biquadratique f donnée par les points de rencontre de la tangente en question avec la courbe.*

A l'égard des courbes de latitude et des courbes méridiennes, nous mentionnerons encore, pour finir, la relation d'après laquelle *les deux tangentes imaginaires conjuguées issues de chaque point de la surface annulaire sont harmoniques aux directions de ces courbes.* Cette relation donne, au surplus, une connexion digne de remarque

Nous allons encore traiter quelques autres problèmes à l'aide de l'équation (12). Nous nous proposerons d'abord une question dont la réponse nous a déjà été donnée occasionnellement par le mode de description des courbes du troisième ordre de Grassmann (p. 273) :

Trois points dont les arguments sont a, b, c étant donnés sur la courbe, on demande de mener par ces points trois droites qui se coupent sur la courbe.

Désignant par u, v, w ces trois points d'intersection, nous avons les trois conditions

$$a+v+w\equiv 0,$$
$$b+w+u\equiv 0,$$
$$c+u+v\equiv 0,$$

d'où, par addition,

$$u+v+w\equiv -\frac{a+b+c}{2}+\frac{p\omega+q\omega'}{2},$$

et, finalement (en faisant $P=p\omega+q\omega'$),

$$(18)\quad \begin{cases} u\equiv \dfrac{a-b-c}{2}+\dfrac{P}{2}, \\ v\equiv \dfrac{b-c-a}{2}+\dfrac{P}{2}, \\ w\equiv \dfrac{c-a-b}{2}+\dfrac{P}{2}. \end{cases}$$

Il suffit de substituer ici à p et q zéro ou 1, et nous obtenons ainsi le théorème connu :

Il existe quatre triangles dont les sommets sont situés individuellement sur la courbe et dont les côtés passent par trois points donnés de la courbe.

Ensuite la comparaison des expressions (18) et (15) donne ce résultat, qui nous est également déjà connu :

Si l'on construit, par rapport aux sommets de l'un de ces

entre le système des courbes de latitude et la forme mixte Q appartenant à la courbe primitive. Consulter, pour plus de détails sur ce sujet, HARNACK, *Ueber die Verwerthung der elliptischen Functionen für die Geometrie der Curven dritten Grades* (*Math. Annalen*, t. IX); *voir* aussi ci-après, p. 381.

triangles, les points correspondants dans les trois systèmes de couples de pôles, on obtient les sommets des trois autres triangles.

On déduit facilement de là la construction déjà donnée des trois autres triangles. Si les points a, b, c sont en ligne droite, on a

$$a + b + c \equiv 0,$$

et il existe une période $\Pi = \pi\omega + \varkappa\omega'$, telle que

$$\frac{1}{2}(a + b + c) \equiv \frac{1}{2}\Pi.$$

Par suite, les équations (18) deviennent

$$u \equiv a + \frac{P - \Pi}{2}, \quad v \equiv b + \frac{P - \Pi}{2}, \quad w \equiv c + \frac{P - \Pi}{2}.$$

Parmi les quatre solutions précédemment trouvées, il y en a, d'après cela, une improprement dite ($P = \Pi$), le triangle correspondant se transformant en la ligne de jonction des trois points donnés ([1]).

On ne peut donc inscrire à une courbe du troisième ordre que trois triangles dont les côtés passent par trois points donnés en ligne droite sur la courbe. Leurs sommets sont les trois groupes ternaires qui correspondent aux points donnés comme pôles conjugués dans les trois systèmes. (*On peut baser sur ces triangles six descriptions de la courbe dans le système de* Grassmann).

Nous pouvons au surplus, à l'aide de l'équation (12), étudier les polygones de Steiner ([2]), que nous avons déjà considérés dans les courbes à point double; le théorème sur l'évanouissement de la somme d'intégrales se présente alors à la place de l'évanouissement de la somme des logarithmes, qui a lieu dans les courbes à point double [*voir* p. 337, équation (16), et p. 345].

Pour construire un polygone de Steiner, nous tracerons par un point fixe a de la courbe une droite quelconque qui coupera encore

---

([1]) *Voir* Clebsch, *Math. Annalen*, t. V, p. 425, et pour le cas particulier où a, b, c sont en ligne droite, Hesse, *Journal de Crelle*, t. 36.

([2]) *Voir* Steiner, *Journal de Crelle*, t. 32, p. 182, et Clebsch, *ibid.*, t. 63 (*Ueber einen Satz von Steiner und einige Punkte der Theorie der Curven dritter Ordnung*). C'est dans ce dernier Mémoire que les fonctions elliptiques ont été pour la première fois appliquées aux courbes du troisième ordre.

celle-ci en deux points ayant pour arguments u_1, u_2; nous joindrons u_2 à un point fixe quelconque b de la courbe par une ligne passant par un point u_3, puis u_3 à a par une droite coupant la courbe en u_4, et ainsi de suite. On demande quelle doit être la situation de b pour qu'un polygone *fermé* de $2n$ côtés prenne naissance, c'est-à-dire, pour que le $2n^{\text{ième}}$ côté passe de nouveau par le point u_1. Cette construction nous donne immédiatement les équations de condition suivantes :

$$(19)\quad \begin{cases} a+u_1 \quad +u_2 \equiv 0, & b+u_2 \ +u_3\equiv 0,\\ a+u_3 \quad +u_4 \equiv 0, & b+u_4 \ +u_5\equiv 0,\\ a+u_5 \quad +u_6 \equiv 0, & b+u_6 \ +u_7\equiv 0,\\ \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots,\\ a+u_{2n-1}+u_{2n}\equiv 0, & b+u_{2n}+u_1\equiv 0. \end{cases}$$

Il en résulte, par addition,

$$na+\Sigma u_i\equiv 0,\quad nb+\Sigma u_i\equiv 0$$

ou

$$(20)\qquad a\equiv b+\frac{1}{n}(p\omega+q\omega').$$

Par le moyen de cette équation, b est défini d'une façon multiple lorsque a est donné. Ensuite, tous les sommets du polygone peuvent se calculer successivement au moyen de (19), dès que l'un d'eux, u_1 par exemple, a été choisi arbitrairement, et, par suite, dans l'équation (20) se trouve la démonstration du théorème de Steiner :

Il existe un nombre infini de polygones de $2n$ côtés et de $2n$ sommets dont les sommets sont situés sur une courbe générale du troisième ordre, dont les côtés impairs se rencontrent en un point a de la courbe, et dont les côtés pairs passent par un second point b de cette même courbe. Si a est donné, b est déterminé d'une façon multiple; d'un autre côté, à deux points associés a et b (ou couple de points de Steiner répondant au nombre n), correspondent des polygones en nombre infiniment grand, le premier côté (qui passe par a) étant complétement arbitraire.

Pour ce qui concerne la détermination de a lorsqu'on a b (ou de b lorsqu'on a a), l'équation (20) montre qu'elle se fait au

moyen de la division en n parties des fonctions elliptiques; en effet, il faut, pour obtenir les coordonnées du point a, déduire d'après (5), pour $b = \frac{\beta}{n}$, $\sin\mathrm{am}\left(\frac{\beta + p\omega + q\omega'}{n}\right)$ de $\sin\mathrm{am}\,\beta$.

Le problème a, comme on le sait, n^2 solutions, n étant un nombre premier impair, et ces solutions peuvent se représenter par radicaux au moyen des racines d'une seule équation du $(n+1)^{\text{ième}}$ degré. Parmi les n^2 solutions dont il s'agit, il en est une qui ne peut nous servir, celle où a est égal à b.

Si donc n est un nombre premier, il existe $n^2 - 1$ points b formant avec un point donné a un couple de points de Steiner. Ces points se classent en $n+1$ groupes répondant aux racines de l'équation du $(n+1)^{\text{ième}}$ degré dont il a été parlé, et chaque groupe se compose de $n-1$ points. Des relations qui seront données plus tard entre les différents couples de points de Steiner, on déduira d'ailleurs des rapports très simples entre les points d'un tel groupe.

Si n n'est pas un nombre premier, il pourra arriver que les nombres p, q qui figurent dans l'expression

$$\varepsilon = \frac{p\omega + q\omega'}{n}$$

et qui peuvent prendre les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$ aient simultanément le même facteur en commun avec n, et alors la figure à $2n$ sommets s'obtient par répétition d'un polygone d'un nombre de côtés moindre ([1]). On a donc en général ce théorème :

A tout point a de la courbe répondent autant de points b qu'il existe de couples de nombres p, q ($<n$) n'ayant avec n aucun facteur commun.

Les points d'inflexion donnent lieu à des polygones particulièrement remarquables. On reconnaît en effet sur (16) que les points d'inflexion forment deux à deux un couple de Steiner pour $n=3$ et sur (17) que deux points de contact des tangentes issues des différents points d'inflexion forment un couple semblable pour

---

([1]) Comparez les développements correspondants dans les courbes à point double, p. 340.

$n = 6$. On a par conséquent cet énoncé, dont la première partie a déjà été donnée par Steiner :

Deux points d'inflexion peuvent être les points d'intersection des côtés pairs et impairs d'un hexagone de Steiner, et deux points de contact des tangentes issues de deux d'entre eux peuvent être les points semblables d'un dodécagone de Steiner.

Nous pouvons d'ailleurs obtenir de la manière suivante sur la courbe des systèmes de points qui ramènent pour un cas spécial ($n = 3$) aux points d'inflexion. Nous posons la condition que, dans le système des points b répondant à un point a, un troisième point soit situé sur la ligne de jonction de deux autres. Si deux points semblables (b, b') sont donnés par les équations

$$a \equiv b + \frac{p\omega + q\omega'}{n}, \quad a \equiv b' + \frac{p'\omega + q'\omega'}{n},$$

on doit pouvoir indiquer deux nombres p'', q'' tels que

$$a \equiv b'' + \frac{p''\omega + q''\omega'}{n}$$

et que $b + b' + b'' \equiv 0$, c'est-à-dire que

$$3a - \frac{1}{n}[(p + p' + p'')\omega + (q + q' + q'')\omega'] \equiv 0,$$

ou bien encore on doit avoir (r, s *étant des nombres entiers*)

$$(21) \qquad a \equiv \frac{r\omega + s\omega'}{3} + \frac{1}{3n}[(p + p' + p'')\omega + (q + q' + q'')\omega'].$$

Comme maintenant la première partie du deuxième membre est l'argument d'un point d'inflexion, on a le théorème suivant :

Tous les points a qui peuvent former avec un point d'inflexion un couple steinérien de points répondant au nombre $3n$, *et ceux-là seulement, possèdent la propriété que les lignes joignant deux points qui forment avec a un couple de points répondant au nombre n coupent la courbe en un troisième point constituant avec a un couple de même nature.*

L'étude approfondie des systèmes de points a, b ainsi définis qui dépendent des points d'inflexion, et dont le système des points

d'inflexion lui-même apparaît comme le cas le plus spécial, offre un grand intérêt. Ces systèmes sont différents suivant la nature des nombres

$$n, \quad p_0 = p + p' + p'', \quad q_0 = q + q' + q'',$$

et voici de quelle manière : a satisfaisant à la relation (21), nous appellerons, pour abréger, point r, s un point qui forme avec a un couple de points répondant au nombre n et dont l'argument est par conséquent de la forme $a + \frac{r\omega + s\omega'}{n}$. Cela étant, si les points r, s; r', s'; r'', s'' doivent être en ligne droite, on aura nécessairement

$$r + r' + r'' \equiv p_0, \quad s + s' + s'' \equiv q_0 \quad (\text{mod.}\, n).$$

Si maintenant, en premier lieu, n est divisible par 3, *mais qu'il n'en soit pas de même pour* p_0 *et* q_0, les points r, s; r', s'; r'', s'' ne peuvent jamais se confondre. *Si, au contraire, n n'est pas divisible par* 3, on peut toujours faire, et cela d'une seule manière,

$$3r \equiv p_0, \quad 3s \equiv q_0 \quad (\text{mod.}\, n);$$

alors un point d'inflexion appartient au système. Si enfin les trois nombres n, p_0, q_0 sont divisibles par 3, chacun des neuf points d'inflexion appartient au système.

Dans le cas de n impair, les congruences

$$r' + 2r \equiv p_0, \quad s' + 2s \equiv q_0 \quad (\text{mod.}\, n)$$

ont lieu simultanément, de sorte qu'à tout point r', s' correspond un point r, s et réciproquement. Dans cette hypothèse, on peut donc de tout point du système mener *une* tangente dont le point de contact appartient au système, et en tout point du système la tangente passe encore par un autre point de ce dernier. *Si au contraire n est pair,* à tout point r, s répond un point r', s'; mais, à l'inverse, à un point r', s' ne répond un point r, s que si les nombres $p_0 - r'$, $q_0 - s'$ sont pairs, et alors au même point répondent encore les points

$$r + \frac{n}{2}, s; \quad r, s + \frac{n}{2}; \quad r + \frac{n}{2}, \quad s + \frac{n}{2}.$$

Conséquemment, la tangente en un point quelconque du système

passe par un autre point, mais toujours quatre par le même, de sorte qu'il n'y a que le quart des points par lesquels passent les tangentes d'autres points (¹).

L'étude des couples de points de Steiner nous donne occasion de placer quelques explications générales relatives à la distribution binaire ou correspondance qui nous est donnée par eux sur la courbe. Un couple de cette nature est défini par la relation (20), c'est-à-dire par

$$(22) \qquad a - b \equiv \frac{1}{n}(p\omega + q\omega') \quad (\equiv s).$$

Si nous faisons parcourir la courbe au point a et que nous cherchions le point b correspondant à chacune de ses positions, en attribuant aux nombres p, q des valeurs constantes déterminées, nous obtiendrons tous les couples imaginables qui répondent sur la courbe au nombre n et pour lesquels les nombres p, q ont ces valeurs déterminées; or il est clair que tous ces couples de points a', b' dérivent du couple donné a, b en faisant varier les arguments d'une constante, de sorte que la condition $a' - b' \equiv a - b$ reste satisfaite. Cette observation donne la construction géométrique suivante des couples dont il s'agit. On joint les points a, b à un point quelconque c de la courbe, de telle sorte que cette dernière soit rencontrée par les lignes $\overline{ac}$, $\overline{bc}$ aux points b', a' en supposant

$$a' \equiv -(b + c), \quad b' \equiv -(a + c).$$

Il en résulte

$$(23) \qquad a' - b' \equiv a - b \equiv s.$$

Pour énoncer d'une manière simple le sens de cette équation, nous diviserons les couples de points (22) en différentes *classes* et nous réunirons en une même classe tous ceux pour lesquels les nombres p, q ont les mêmes valeurs. L'équation (23) nous donne alors ce théorème :

Si l'on joint un couple steinérien de points à un point quelconque de la courbe, les lignes de jonction coupent la courbe en

(¹) *Voir*, pour plus de détails sur ces systèmes de points, Clebsch, *loc. cit.*

de nouveaux couples de points de la même classe, en sorte que l'on obtient tous les couples de points d'une classe au moyen de l'un d'entre eux en faisant mouvoir le point arbitraire sur toute la courbe.

Les différentes classes de points se rangent ensuite en *groupes*, en tant que l'on réunit pour en former un groupe toutes les classes pour lesquelles la quantité $\varepsilon = \frac{1}{n}(p\omega + q\omega')$ ne diffère que par des facteurs numériques entiers et à l'égard desquelles on a par suite

$$a - b \equiv \varepsilon,\ 2\varepsilon,\ 3\varepsilon,\ \ldots,\ (n-1)\varepsilon.$$

Mais il est à remarquer que les classes qui dans un groupe répondent à $h\varepsilon$ et $(n-h)\varepsilon$ ne diffèrent pas entre elles, puisqu'elles se transforment l'une dans l'autre par simple permutation de a et de b. Chaque groupe comprend donc seulement $\frac{1}{2}(n-1)$ classes, et il existe $(n+1)$ groupes semblables, corrélatifs aux racines de l'équation du $(n+1)^{\text{ième}}$ degré dont dépend la division en n parties (¹). D'ailleurs dans chaque groupe, si n n'est pas un nombre premier, sont comprises des classes de polygones improprement dits, ainsi qu'on le conclut de considérations semblables à celles développées plus haut; mais nous n'insisterons pas davantage sur ces cas. Nous mentionnerons seulement un théorème au moyen duquel, en tenant compte du théorème précédent, on peut, comme on le voit immédiatement, *déduire linéairement d'un seul couple tous les couples d'un groupe*

Si l'on a en effet les équations

$$a - b \equiv h\varepsilon, \quad a' - b' \equiv h'\varepsilon,$$

et que les points a'', b''; a''', b''' soient définis par

$$a + b' + a'' \equiv 0, \quad b + a' + b'' \equiv 0,$$
$$a + a' + a''' \equiv 0, \quad b + b' + b''' \equiv 0,$$

on a aussi

$$a'' - b'' \equiv (h' - h)\varepsilon, \quad a''' - b''' \equiv -(h + h')\varepsilon.$$

(¹) Ces groupes correspondent conséquemment aux diverses classes non équivalentes que l'on distingue dans une transformation du $n^{\text{ième}}$ degré.

Si donc deux couples a, b ; a', b' du même groupe sont donnés, et qu'on les réunisse diagonalement, les lignes de jonction déterminent sur la courbe deux nouveaux couples de points qui appartiennent au même groupe. Dans le cas seulement où les deux couples sont de la même classe ($h = h'$), l'un des nouveaux couples se confond avec un point de la courbe, tandis que le second appartient à une autre classe. Cette dernière observation conduit à trouver au moyen de deux couples de la même classe les couples d'autres classes du même groupe. Mais comme, d'après le théorème précédent tous les couples d'une classe sont donnés par un seul couple de celle-ci, on peut en réalité construire tous les points d'un groupe au moyen d'un seul couple.

Il n'est au contraire pas possible de construire les couples de points de *différents* groupes si un couple unique est donné. Il est nécessaire pour cela d'avoir deux couples

$$a - b \equiv \varepsilon, \quad a' - b' \equiv \varepsilon'$$

n'appartenant pas au même groupe. Si on leur applique en effet la même construction, on arrive à deux couples pour lesquels

$$a'' - b'' \equiv \varepsilon' - \varepsilon, \quad a''' - b''' \equiv -(\varepsilon + \varepsilon').$$

Nous avons donc ce théorème :

Si deux couples steinériens (a, b, ε ; a', b', ε') de différents groupes sont donnés, et qu'on joigne a à b', a' à b ou a à a', b à b', on obtient un troisième couple qui appartient à un autre groupe. Avec deux couples donnés de groupes différents on peut en général construire tous les couples qui répondent à un nombre n si

$$\varepsilon = \frac{1}{n}(p\omega + q\omega'), \quad \varepsilon' = \frac{1}{n}(p'\omega + q'\omega'),$$

et que ni p, q ni p', q' n'aient un facteur commun avec n.

On peut d'ailleurs chercher les relations entre les couples de points qui répondent à des nombres différents ; nous négligerons toutefois le développement de ces théories pour rattacher à ce qui précède des recherches d'un autre caractère, celles qui consistent à établir la liaison des relations entre les différents points de la courbe avec d'autres figures géométriques dans le plan. Si l'on

attribue en effet aux nombres p, q dans (22) des valeurs constantes, les lignes qui joignent deux points correspondants a, b envelopperont une courbe déterminée, *et cette courbe est de la sixième classe* [1]. A un point b correspond en effet, en vertu de (22), le point $a \equiv b + \varepsilon$, ε étant une constante, et le troisième point d'intersection u de la ligne qui joint a et b est déterminé par

$$2b + \varepsilon + u = 0.$$

Les points b dont les lignes de jonction au point correspondant $b + \varepsilon$ passent par le même point u sont conséquemment déterminés par

$$(24) \qquad b \equiv -\frac{\varepsilon + u}{2} + \frac{p\omega + q\omega'}{2},$$

c'est-à-dire que leur nombre est égal à 4, corrélativement aux quatre couples de valeurs que l'on doit attribuer à p, q; mais par u passent, en outre, la ligne qui joint u (comme point b) au point correspondant $u + \varepsilon$ et la ligne qui joint u (comme point a) au point correspondant $u - \varepsilon$, de sorte que nous avons en tout six tangentes que l'on peut mener par u. La relation (24), par comparaison avec (15), donne en passant cette proposition :

Si la ligne joignant le point a au point associé $a + \varepsilon$ passe par u, les lignes qui joignent les trois points formant avec a un couple de pôles à leurs points correspondants passent également par u.

Si l'on prend en particulier dans (22) $n = 2$, d'où $\varepsilon = \frac{1}{2}\omega$ ou $\frac{1}{2}\omega'$ ou $\frac{1}{2}(\omega + \omega')$, deux points associés a, b forment un couple de pôles et la relation entre eux devient réciproque ; la figure enveloppe de leurs lignes de jonction n'est donc plus que de la troisième classe. Donc, suivant des théorèmes connus, les trois courbes qui prennent ainsi naissance ne sont autres que les trois *cayleyennes* respectives des trois courbes du troisième ordre auxquelles la courbe primitive appartient comme *hessienne*. *Ainsi, parmi les*

---

[1] *Voir* pour ce qui suit le Mémoire de HARNACK (*loc. cit.*), dans lequel se trouve expliqué en détail ce que sont ces courbes par rapport au réel et à l'imaginaire.

courbes de la sixième classe qui ont été définies un peu plus haut, sont comprises pour $n = 2$ les trois cayleyennes qui correspondent à la courbe primitive de la manière connue, chacune comptant deux fois.

On peut, d'ailleurs, rendre ce qui précède complétement indépendant des couples de points de Steiner en considérant ε comme un paramètre variant d'une manière continue, sans avoir égard à ce qu'il se présente sous la forme $\frac{1}{n}(p\omega + q\omega')$. A chaque valeur de ε répond alors de la manière indiquée une courbe de sixième classe, et *toute tangente du plan est touchée par trois courbes du système engendré par variation de ε.* Car on peut évidemment combiner les trois points d'intersection d'une droite quelconque avec la courbe primitive de trois manières différentes en les associant deux à deux ([1]).

Au lieu de faire usage de la relation $a - b \equiv \varepsilon$, on peut naturellement aussi associer à tout point a un point b par la condition $a + b \equiv \varepsilon$. *Alors la ligne qui joint deux points correspondants passe toujours par le même point* $-\varepsilon$; cette espèce d'association est donc essentiellement différente de celle dont il a été parlé précédemment. Sont particulièrement intéressants les cas où le point $-\varepsilon$ est situé en l'un des neuf points d'inflexion. Toute droite passant par un point semblable est, en effet, divisée harmoniquement par la courbe et par la droite harmonique du point d'inflexion dont il s'agit. *L'arrangement par couples sur la courbe, qui est donné par la relation $a + b \equiv \frac{1}{3}(p\omega + q\omega')$, sera donc représenté par une collinéation dans le plan et même par une transformation perspective dont le centre de collinéation est situé en un point d'inflexion et dont l'axe de collinéation coïncide avec la droite harmonique correspondante* ([2]).

([1]) Ce système de courbes est le même (interverti seulement dans le sens dualistique) que celui qui, dans les courbes à deux branches réelles, fournit les courbes de latitude sur la surface annulaire (*voir* la note de la page 370). Nous reviendrons encore sur sa liaison avec le connexe $Q \equiv (abu)^2 (cau) c_x^2 b_x$ dans le Chapitre II du tome III de ces Leçons.

([2]) En dehors de ces neuf collinéations il existe neuf autres transformations de la courbe C_3 en elle-même, et chacune de celles-ci prend naissance par combinaison de

On peut enfin examiner la relation plus générale

$$ma - nb \equiv \varepsilon$$

entre les points a et b sur la courbe. *A tout point a correspondent n^2 points b, et inversement, à tout point b, m^2 points a,* m et n étant des nombres premiers impairs. *Les lignes qui joignent les points correspondants enveloppent ici une courbe de la classe*

$$2(m^2 + mn + n^2),$$

proposition que l'on démontre facilement comme la proposition semblable pour le cas de $m = n = 1$. Mais au contraire on ne serait plus conduit à des courbes algébriques de cette espèce comme figures enveloppes si l'on relie deux points a, b par la relation encore plus générale

$$a = \rho b + \varepsilon,$$

ρ désignant une constante *quelconque*. Dans chacun de ces cas on peut d'ailleurs représenter aisément comme fonctions elliptiques d'un paramètre les tangentes u_i des enveloppes qui ont cette origine; il suffit de calculer au moyen de (5) les coordonnées x_i et y_i des points dont les arguments sont u et $\rho u + \varepsilon$, et de poser ensuite $u_i = (xy)_i$.

Nous passons maintenant à d'importantes généralisations de ce qui précède, généralisations qui se rapportent aux points d'intersection de C_3 avec d'autres courbes quelconques. Soient d'abord $u_1, u_2, \ldots, u_6$ les arguments des six points d'intersection de C_3 avec une conique. Supposons que les lignes joignant u_1 et u_2, u_3 et u_4, u_5 et u_6 rencontrent encore la courbe en v_1, v_2, v_3. D'après notre théorème fondamental sur les systèmes de points d'intersection (p. 133), les points v_1, v_2, v_3 sont nécessairement sur une droite, car nous avons trois courbes du troisième ordre qui ont huit points communs et doivent se couper en un neuvième point; ces courbes sont :

---

deux des premières. *Voir* la note de la p. 234. En partant des points d'inflexion on sera aussi simplement conduit à la considération de ce qu'on appelle les groupes ternaires d'inflexion. *Voir* sur ce sujet Gent, *Zeitschrift* de Schlömilch, t. XVII.

1° La courbe C_3 ;
2° Les trois lignes $\overline{1.2}$, $\overline{3.4}$, $\overline{5.6}$;
3° La conique et la ligne joignant v_1 et v_2.

Par suite, en vertu de (12), existe la relation

$$v_1 + v_2 + v_3 \equiv 0,$$

et de notre construction des points v_i résulte

$$u_1 + u_2 + v_1 \equiv 0,$$
$$u_3 + u_4 + v_2 \equiv 0,$$
$$u_5 + u_6 + v_3 \equiv 0,$$

d'où, par addition,

(25) $$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, \omega, \omega').$$

Par conséquent, *la somme des arguments des six points d'intersection d'une conique avec une courbe du troisième ordre est congruente à zéro (dans la représentation paramétrique par nous employée).*

On peut d'ailleurs poursuivre de la même manière, et, par l'application continuée des théorèmes sur les systèmes de points d'intersection, on arrive à ce résultat que pour les arguments des points de rencontre de notre courbe C_3 avec une courbe C_n existe l'équation

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{3n} \equiv 0.$$

Mais ce résultat est aussi une conséquence directe du théorème de l'addition des fonctions elliptiques, tel que nous l'avons énoncé dans l'équation (9).

Soit $\Phi = 0$ l'équation d'une courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre, *et supposons d'abord* $n = 2m$. Si nous posons dans Φ, suivant (5),

$$x_1 = s^3, \quad x_2 = s, \quad x_3 = c\Delta,$$

en faisant encore

$$s = \sin\text{am}\, u, \quad c = \cos\text{am}\, u, \quad \Delta = \Delta\text{am}\, u,$$

et que nous ayons égard à ce que

$$c^2 = 1 - s^2, \quad \Delta^2 = 1 - k^2 s^2,$$

Φ deviendra manifestement de la forme

$$\begin{aligned}\Phi = s^{6m} + a_1 s^{6m-2} + a_2 s^{6m-4} + \ldots + a_{3m}\\ + c\Delta(b_1 s^{6m-3} + b_2 s^{6m-5} + \ldots + b_{3m-1} s),\end{aligned}$$

et les coefficients a_i, b_i de cette expression se composent des coefficients de Φ et du carré du module k.

Or la fonction Φ doit s'annuler lorsque l'on met pour u l'un des arguments des $3n$ points d'intersection, c'est-à-dire pour

$$u = u_1, \quad u = u_2, \ldots, \quad u = u_{3n}.$$

Cela donne $6m = 3n$ équations pour la détermination des $3n - 1$ grandeurs $a_i b_i$. Si donc on pose de nouveau $s_i = \sin\operatorname{am} u_i$, $c_i = \cos\operatorname{am} u_i$, $\Delta_i = \Delta\operatorname{am} u_i$, on aura l'équation $R = 0$, R désignant le déterminant suivant :

$$R = \begin{vmatrix} s_1^{3n} & s_1^{3n-2} & \ldots & 1 & c_1\Delta_1 s_1^{3n-3} & c_1\Delta_1 s_1^{3n-5} & \ldots & s_1 c_1 \Delta_1 \\ s_2^{3n} & s_2^{3n-2} & \ldots & 1 & c_2\Delta_2 s_2^{3n-3} & c_2\Delta_2 s_2^{3n-5} & \ldots & s_2 c_2 \Delta_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{3n}^{3n} & s_{3n}^{3n-2} & \ldots & 1 & c_{3n}\Delta_{3n} s_{3n}^{3n-3} & c_{3n}\Delta_{3n} s_{3n}^{3n-5} & \ldots & s_{3n} c_{3n} \Delta_{3n} \end{vmatrix}.$$

Si d'autre part on forme, à l'aide des équations (9), (10) et (11), l'expression

$$\sin\operatorname{am}(u_1 + u_2 + \ldots + u_{3n}) = \frac{\pm\varphi(0)}{s_1 s_2 \ldots s_{3n}},$$

le déterminant R figure précisément dans le numérateur de cette dernière, et l'on a

$$\pm\varphi(0) = \frac{R}{S} s_1 s_2 s_3 \ldots s_{3n},$$

en posant, pour abréger,

$$S = \begin{vmatrix} s_1^{3n-1} & s_1^{3n-3} & \ldots & s_1 & c_1\Delta_1 s_1^{3n-2} & c_1\Delta_1 s_1^{3n-4} & \ldots & s_1 c_1 \Delta_1 \\ s_2^{3n-1} & s_2^{3n-3} & \ldots & s_2 & c_2\Delta_2 s_2^{3n-2} & c_2\Delta_2 s_2^{3n-4} & \ldots & s_2 c_2 \Delta_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{3n}^{3n-1} & s_{3n}^{3n-3} & \ldots & s_{3n} & c_{3n}\Delta_{3n} s_{3n}^{3n-2} & c_{3n}\Delta_{3n} s_{3n}^{3n-4} & \ldots & s_{3n} c_{3n} \Delta_{3n} \end{vmatrix}.$$

Maintenant on s'assure facilement (comme dans le cas de $n = 1$) que le déterminant S ne peut pas, en général, s'évanouir par suite des $3n$ équations dont il a été question plus haut, et conséquem-

ment de (9) résulte

$$\operatorname{sinam}(u_1 + u_2 + \ldots + u_{3n}) = 0$$

ou enfin

(26) $$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{3n} \equiv 0 \quad (\text{mod.}\,\omega, \omega').$$

L'examen du cas de n impair s'effectue d'une manière tout à fait semblable, comme le montre déjà l'exemple de la droite, et il n'est pas nécessaire d'entrer dans les détails. On arrive ainsi à ce théorème fondamental :

Si l'on représente les points d'une courbe du troisième ordre comme fonctions elliptiques d'un argument, de telle sorte qu'à la valeur zéro de l'argument corresponde un point d'inflexion, la somme des arguments pour les $3n$ *points d'intersection avec une courbe du* $n^{ième}$ *ordre est toujours congruente à zéro.*

Par ce théorème se trouve en même temps confirmée la proposition déjà connue d'après laquelle, parmi les points d'intersection d'une courbe C_3 avec une courbe C_n, l'un est toujours déterminé par les autres (p. 135), car l'argument de ce dernier s'exprime linéairement, en vertu de (26), au moyen des $3n - 1$ restants.

Nous ne nous proposons plus que de faire usage de ce dernier théorème pour obtenir quelques propositions relatives aux coniques de contact, propositions qui nous sont déjà connues par une autre voie (p. 266).

Supposons d'abord qu'une conique doive toucher C_3, aux trois points u_1, u_2, u_3 ; deux points d'intersection se confondent, et nous avons

$$2(u_1 + u_2 + u_3) \equiv 0$$

ou

(27) $$u_1 + u_2 + u_3 \equiv \frac{1}{2}(p\omega + q\omega').$$

L'hypothèse $p = 0$, $q = 0$, donne la condition que les trois points soient situés sur une ligne droite, cette dernière pouvant en effet, si on la compte deux fois, être considérée comme une conique tangente. *Il existe donc seulement trois systèmes de coniques de contact proprement dites, systèmes se distinguant par la circonstance qu'entre les arguments de leurs trois points de con-*

tact existent respectivement les équations

$$(28)\quad u_1+u_2+u_3\equiv\frac{1}{2}\omega,\quad u_1+u_2+u_3\equiv\frac{1}{2}\omega',\quad u_1+u_2+u_3\equiv\frac{1}{2}(\omega+\omega').$$

A l'aide de ces relations on vérifie encore aisément, en tenant compte de (15), la construction obtenue plus haut pour le troisième point de contact, si les deux autres sont donnés. Si l'on fait passer par u_1, u_2, u_3 une autre conique rencontrant encore la courbe C_3 en v_1, v_2, v_3, on a

$$u_1+u_2+u_3+v_1+v_2+v_3\equiv 0,$$

d'où, à cause de (28),

$$v_1+v_2+v_3\equiv\frac{1}{2}\omega,\quad \frac{1}{2}\omega',\quad \frac{1}{2}(\omega+\omega');$$

et de là résulte la proposition suivante qui a Hesse pour auteur :

Si l'on fait passer par les trois points de contact d'une conique une nouvelle conique, celle-ci coupe encore la courbe en trois points qui sont les points de contact d'une autre conique appartenant au même système.

Si la conique doit avoir en deux points distincts (u_1 et u_2) un contact du second ordre, on aura

$$3(u_1+u_2)\equiv 0$$

ou

$$u_1+u_2\equiv\frac{1}{3}(p\omega+q\omega').$$

Les deux points de contact sont donc, d'après (16), *constamment en ligne droite avec un point d'inflexion.*

Nous mentionnerons encore comme dernier exemple la détermination des quatre points (u_1 u_2, u_3, u_4) de la courbe qui sont les *opposés* du point v (p. 269). En prenant u_1, u_2, u_3, u_4 comme points de base d'un faisceau de coniques dont les courbes individuelles coupent encore C_3 aux points mobiles u_5, u_6, on a

$$u_5+u_6\equiv-(u_1+u_2+u_3+u_4).$$

Si donc on pose $v = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$, on a toujours l'équation

$$u_5 + u_6 + v = 0,$$

c'est-à-dire que les lignes de jonction des points d'intersection mobiles passent toutes par le même point dont l'argument est v. Toutes les recherches relatives aux systèmes de points d'intersection, et par suite, en particulier, le théorème du reste, peuvent être effectuées de la même manière; mais nous insisterons d'autant moins sur ce sujet que les développements correspondants dans les courbes d'ordre supérieur nous occuperont encore. Faisons seulement observer que les propositions sur les polygones de Steiner admettent une *généralisation* facile si l'on remplace les lignes droites par des courbes du $n^{\text{ième}}$ ordre qui coupent la courbe C_3 en trois points mobiles et ont conséquemment $3n-3$ intersections fixes avec elle. On peut donc, en particulier, au lieu des côtés de polygones, choisir, comme l'a déjà fait Steiner, des coniques passant par trois points fixes de la courbe.

Nous avons rattaché plus haut, pour plus de simplicité, l'introduction des fonctions elliptiques dans la théorie d'une courbe du troisième ordre à une forme canonique de l'équation de cette dernière; il y a, d'ailleurs, moyen d'effectuer aussi les calculs indépendamment du système de coordonnées employé, comme nous le verrons encore plus tard (¹). Nous allons d'abord signaler brièvement la marche des développements qui y conduisent.

Nous plaçons le triangle des coordonnées de telle sorte que le sommet ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) se trouve sur la courbe, ce qui suppose la connaissance d'un point *quelconque* de celle-ci (et non plus d'un point d'inflexion). L'équation de la courbe se présente alors sous la forme

$$\varphi_3 + \psi_2 x_3 + \chi_1 x_3^2 = 0,$$

φ_3, ψ_2, χ_1 étant des fonctions homogènes en x_1, x_2 de l'ordre de leur indice. Nous chercherons les coordonnées des points d'intersection d'un rayon du faisceau $\lambda x_1 - x_2 = 0$ avec la courbe. Si, d'après cela, nous faisons $x_2 = \lambda x_1$ dans φ_3, ψ_2, χ_1, et que nous

(¹) *Voir* la Section suivante de ce Chapitre.

négligions les indices, notre équation se transforme en

$$x_3^2\chi + x_1 x_3 \psi + x_1^2 \varphi = 0,$$

et il vient par conséquent

$$\frac{x_3}{x_1} = \frac{-\psi \pm \sqrt{\psi^2 - 4\varphi\chi}}{2\chi},$$

ou, en désignant par ρ un facteur arbitraire,

$$(29) \qquad \begin{cases} \rho x_1 = 2\chi, \\ \rho x_2 = 2\lambda\chi, \\ \rho x_3 = -\psi \pm \sqrt{\psi^2 - 4\varphi\chi}. \end{cases}$$

Si l'on transforme maintenant la courbe par le choix d'un autre triangle quelconque de coordonnées, les nouvelles coordonnées seront des fonctions linéaires de x_1, x_2, x_3, et, par conséquent, les coordonnées d'un point de la courbe seront des combinaisons linéaires des expressions qui figurent dans les seconds membres des équations (29). *Ces coordonnées sont donc, en général, des fonctions entières du second degré d'un paramètre λ, augmentées de la racine carrée d'une expression du quatrième degré.* En désignant cette dernière par M et les fonctions entières précitées par G_1, G_2, G_3, il vient pour un point x de la courbe

$$(30) \qquad \rho x_i = G_i \pm \alpha_i \sqrt{M},$$

les quantités α_i étant des constantes. La fonction M est la même dans les trois expressions, et ce fait résulte de ce que la condition $u_x = 0$ ne doit conduire qu'à une équation du troisième degré, circonstance qui n'aurait pas lieu dans le cas contraire. Nous obtenons positivement aussi au moyen de (30) l'équation du quatrième degré

$$(u_1 G_1 + u_2 G_2 + u_3 G_3)^2 = M(u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2 + u_3\alpha_3)^2;$$

les équations (30) représenteront donc, si G_1, G_2, G_3 et M sont indépendants les uns des autres, une courbe du quatrième ordre [1]

[1] Cette courbe a d'ailleurs deux points doubles, comme nous le verrons plus tard.

qui ne se réduit à une courbe du troisième ordre (par séparation d'une droite passant par le sommet du faisceau de rayons ci-dessus) que si l'équation du quatrième degré en question admet une solution indépendante des quantités u_i. Or, par suite des équations (29), tel est ici le cas, car, si nous y faisons $\chi = 0$ et que nous prenions le signe du radical positif, les quantités x_i deviennent indéterminées et les coefficients des quantités u_i dans u_x s'évanouissent identiquement.

Pour introduire actuellement les fonctions elliptiques, imaginons qu'on ait mis à la place de λ un nouveau paramètre $\frac{\alpha + \beta\lambda}{\gamma + \delta\lambda}$ et qu'on ait déterminé les constantes α, β, γ, δ de telle sorte que la fonction M, abstraction faite d'un facteur constant, se transforme en $\lambda(1-\lambda)(1-k^2\lambda)$. Alors $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$, $\lambda = 1$, $\lambda = \frac{1}{k^2}$ sont les quatre racines de $M = 0$; autrement dit dans le faisceau de rayons $x_2 - \lambda x_1 = 0$ on a choisi pour les rayons $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$ deux tangentes menées du sommet du faisceau à la courbe, car aux valeurs $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$ correspond par l'intermédiaire de (29) ou (30) chaque fois *un seul* point de la courbe. Cela posé, soit maintenant

$$\sqrt{\lambda} = \sin\mathrm{am}\, u, \quad \sqrt{1-\lambda} = \cos\mathrm{am}\, u, \quad \sqrt{1-k^2\lambda} = \Delta\mathrm{am}\, u,$$

de telle sorte que les équations (30) se transforment en

$$(31) \qquad \rho x_i = \varphi_i(\sin^2\mathrm{am}\, u) + \beta_i \frac{d\sin^2\mathrm{am}\, u}{du},$$

les quantités β_i étant des constantes et les quantités φ_i des fonctions rationnelles entières de leur argument, tandis que l'argument qui appartient à un point x est lui-même défini par

$$(32) \quad u = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\lambda}} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)(1-k^2\lambda)}} = \int_0^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-k^2\mu^2)}}.$$

Dans les équations (31) a en même temps disparu le caractère arbitraire qui existait auparavant dans le double signe du radical; les deux points placés sur le même rayon du faisceau $x_2 - \lambda x_1 = 0$ sont actuellement distingués par les arguments u et $-u$.

En partant des équations (31), on démontre maintenant de la manière la plus simple *l'identité des théorèmes précédents relatifs aux systèmes de points d'intersection sur une courbe du troisième ordre avec le théorème de l'addition des fonctions elliptiques,* en introduisant au lieu des fonctions s, c, Δ les fonctions appelées H et en utilisant à l'égard de ces dernières un théorème dont le théorème d'addition précédemment employé peut être déduit comme cas particulier. Pour le premier objet on se sert d'un théorème tiré de la théorie de ces fonctions et qui a été donné par M. Hermite (¹) :

Toute fonction doublement périodique de la forme

$$F(s^2) + 2sc\Delta f(s^2),$$

où F *et* f *sont respectivement des fonctions entières des degrés* n *et* $n-2$ *en* s^2, *peut se représenter comme le quotient d'un produit de fonctions* H *divisé par une puissance d'une fonction* Θ, *et, pour préciser, on a*

$$F(s^2) + \frac{d\sin^2 \operatorname{am} u}{du} f(s^2) = C\,\frac{H(u-\alpha_1)\,H(u-\alpha_2)\,\ldots H(u-\alpha_{2n})}{\Theta^{2n}(u)},$$

C *étant une constante et* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}$ *les valeurs racines de l'argument pour la fonction qui figure dans le premier membre. Entre ces dernières existe toujours la relation*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{2n} \equiv 0.$$

Nous aurions pu naturellement déjà, dans notre représentation précédente, éviter entièrement l'introduction de $s, c\,\Delta$ et utiliser directement les fonctions H, ce qui épargnerait le calcul de

$$\sin \operatorname{am}(u_1 + u_2 + \ldots + u_{3n});$$

néanmoins, dans les cas les plus simples, le calcul avec les fonction susuelles s, c, Δ est plus abrégé.

Sous le bénéfice de la proposition énoncée, nous obtenons au lieu des équations (31), si nous écrivons ρ au lieu de $\rho\Theta^4(u)$, des

(¹) *Voir* Hermite, *loc. cit.*

formules de l'espèce suivante :

$$\rho x_i = C_i H(u-\xi_i) H(u-\eta_i) H(u-\zeta_i) H(u-\vartheta_i),$$

avec

$$\xi_i+\eta_i+\zeta_i+\vartheta_i \equiv 0.$$

Ici trois des grandeurs ξ_i, η_i, ζ_i, ϑ_i, nous pouvons dire les trois premières, sont les valeurs de l'argument u pour les points de rencontre de la ligne $x_i=0$ avec la courbe primitive. Mais, d'après nos développements précédents, il doit y avoir une valeur de u pour laquelle les trois grandeurs ρx_i deviennent indéterminées, et pour cette raison nous pouvons poser

$$\vartheta_1=\vartheta_2=\vartheta_3=\vartheta.$$

Faisant aussi entrer le facteur $H(u-\vartheta)$ dans ρ, il vient

(33) $$\rho x_i = C_i H(u-\xi_i) H(u-\eta_i) H(u-\zeta_i),$$

avec

$$\xi_1+\eta_1+\zeta_1 \equiv \xi_2+\eta_2+\zeta_2 \equiv \xi_3+\eta_3+\zeta_3 \equiv -\vartheta.$$

Or, par une transformation linéaire de l'argument

(34) $$u = v + \frac{1}{3}\vartheta,$$

nous pouvons toujours obtenir que dans le dernier membre de ces relations figure zéro au lieu de $-\vartheta$, car alors les valeurs racines des quantités x_i sont données par les valeurs

$$v=\xi_i-\frac{1}{3}\vartheta=\xi'_i,\quad v=\eta_i-\frac{1}{3}\vartheta=\eta'_i,\quad v=\zeta_i-\frac{1}{3}\vartheta=\zeta'_i,$$

et l'on a encore, d'après le théorème de M. Hermite,

(35) $$\xi'_i+\eta'_i+\zeta'_i \equiv 0.$$

Nous avons maintenant à considérer les points de rencontre de la courbe du troisième ordre avec une courbe d'ordre n

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Si nous introduisons dans Φ, au moyen des équations (33), les fonctions H, nous obtenons une expression qui, multipliée

par $\left[\frac{H(u-\vartheta)}{\Theta^1(u)}\right]^n$, devient une fonction doublement périodique parce que, d'après (33), tout produit ρx_i se transforme par multiplication par $\frac{H(u-\vartheta)}{\Theta^1(u)}$ en une fonction semblable, et cette fonction doublement périodique a les $3n$ valeurs racines

$$u = u_1, \quad u = u_2, \quad \ldots, \quad u = u_{3n},$$

qui correspondent aux $3n$ points d'intersection de $\Phi = 0$ avec la courbe primitive, et une valeur racine $u = \vartheta$ d'ordre de multiplicité n, laquelle correspond au facteur $[H(u-\vartheta)]^n$. Si donc nous appliquons de nouveau le théorème de M. Hermite, Φ doit pouvoir se représenter sous la forme suivante :

$$\rho^n \Phi(x_1, x_2, x_3)\left[\frac{H(u-\vartheta)}{\Theta^1(u)}\right]^n$$
$$= \frac{C' H(u-u_1) H(u-u_2) \ldots H(u-u_3) H^n(u-\vartheta)}{\Theta^{1n}(u)},$$

avec

(36) $$u_1 + u_2 + \ldots + u_{3n} \equiv -\vartheta n.$$

La dernière relation apparaît encore, comme dans l'équation (35), sous la forme

(37) $$v_1 + v_2 + \ldots + v_{3n} \equiv 0,$$

si au moyen de (34) nous introduisons un nouvel argument v à la place de u. Il est d'ailleurs facile de voir que *la réalisation effective de cette dernière transformation, c'est-à-dire la détermination des constantes ϑ, revient à la détermination d'un point d'inflexion de la courbe primitive*. Pour les points de rencontre d'une droite quelconque avec cette dernière, il résulte en effet de (36)

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv -\vartheta,$$

et de là, pour un point d'inflexion u,

$$3u \equiv -\vartheta \quad \text{ou} \quad u \equiv -\frac{1}{3}\vartheta + \frac{1}{3}P,$$

P désignant une combinaison linéaire des multiples des périodes.

Les arguments des points d'inflexion sont donc connus lorsque l'on connaît la valeur des constantes ϑ. On reconnaît en même temps que par la transformation (34) est assignée à un point d'inflexion la valeur d'argument $v \equiv 0$, ce qui concorde avec nos fixations précédentes relativement à l'usage de la forme canonique (p. 364). Nous verrons plus tard comment on peut déterminer en fait les grandeurs ϑ dans leur dépendance des coefficients de l'équation de la courbe primitive et du sommet du faisceau de rayons employé dans la représentation paramétrique ([1]).

Nous sommes ainsi, indépendamment de toute forme canonique, conduits au théorème suivant :

Les coordonnées des points d'une courbe du troisième ordre sans point double peuvent se représenter comme fonctions elliptiques d'un argument, et alors la somme des arguments de ses points d'intersection avec une autre courbe quelconque est congruente à zéro si l'on suppose qu'à l'argument nul corresponde un point d'inflexion.

Dans ce théorème se trouve énoncée une propriété des courbes du troisième ordre qui appartient également à toutes les courbes du genre $p = 1$, ainsi que nous l'apprendront ultérieurement des recherches plus générales. Nous reconnaîtrons aussi plus loin que toute courbe du genre $p = 1$ peut être transformée uni-déterminativement en une courbe du troisième ordre par des substitutions algébriques.

VIII. — La représentation typique d'une forme ternaire cubique et la représentation paramétrique générale de la courbe du troisième ordre.

La réalisation la plus générale de la représentation paramétrique de la courbe du troisième ordre, représentation qui n'a pas été exécutée d'une manière effective dans ce qui précède, exige des recherches spéciales relatives aux formes cubiques ternaires; nous ne devons d'ailleurs donner ces recherches que dans la mesure nécessaire pour l'établissement des formules finales. Nous ne pouvons éviter ici quelques calculs un peu prolixes, que nous

---

([1]) *Voir* la fin de la Section suivante, p. 419 et suiv.

placerons ensemble pour commencer et qui ont pour but d'arriver à ce qu'on appelle la représentation typique de la forme ternaire fondamentale $f = a_x^3$; sous le bénéfice des formules à établir, l'introduction des fonctions elliptiques s'effectuera d'ailleurs très-simplement.

Nous revenons d'abord à l'étude de la forme mixte

$$(1) \qquad N = (a\alpha u) a_x^2 \alpha_x^2 = N_x^4 u_n,$$

dans laquelle nous avons précédemment reconnu un combinant du système $\varkappa f + \lambda\Delta$. On voit immédiatement, en tenant compte de l'équation (22) (p. 290), que l'on a la relation suivante, dont nous devons nous servir incessamment,

$$(2) \qquad \delta N = 0,$$

si par la lettre δ on désigne encore le procédé connu défini par $\delta f = \Delta$ (p. 289). Mais l'équation (2) est aussi la conséquence de la proposition générale suivant laquelle pour tout combinant Π on a identiquement $\delta\Pi = 0$. Un combinant Π est en effet défini par la condition

$$(3) \qquad \Pi(\varkappa a + \lambda\alpha) = M\,\Pi(a).$$

Or, en ordonnant suivant les puissances de $\varkappa$, λ, on a

$$(4) \qquad M = M_0 \varkappa^\nu + M_1 \varkappa^{\nu-1}\lambda + \ldots,$$

ce qui donne d'abord, pour $\lambda = 0$, $\varkappa = 1$,

$$(5) \qquad \Pi(a) = M_0\,\Pi(a),$$

d'où $M_0 = 1$. Mais, si l'on égale dans les deux membres les coefficients de $\varkappa^{\nu-1}\lambda$, on obtient, d'après le théorème de Taylor,

$$\sum \frac{\partial \Pi(a)}{\partial a_{ikh}} \alpha_{ikh} = M_1 \Pi(a) \quad \text{ou} \quad \delta\Pi = M_1 \Pi.$$

Maintenant, $\delta\Pi$ n'est que de deux unités plus élevé que Π par rapport aux coefficients de f; M_1 serait, par suite, un invariant de f du second degré par rapport aux quantités a. Mais une telle fonction n'existe pas (p. 282); on a donc $M_1 = 0$, et conséquemment aussi $\delta\Pi = 0$. La réciproque du théorème est vraie, c'est-à-dire qu'on a également la proposition suivante :

Toute forme Π pour laquelle la forme $\delta\Pi$ s'évanouit est un combinant.

Si l'on a en effet $\delta\Pi = 0$, la formation correspondante $(\delta\Pi)_{\varkappa\lambda}$, c'est-à-dire la forme $\delta\Pi$ établie pour $\varkappa f + \lambda\Delta$ au lieu de f, sera pareillement égale à zéro. Or on a (p. 301)

$$(\delta\Pi)_{\varkappa\lambda} = G_1 \frac{\partial\Pi_{\varkappa\lambda}}{\partial\lambda} - G_2 \frac{\partial\Pi_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa},$$

d'où, pour $\Pi_{\varkappa\lambda}$, l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial G}{\partial\varkappa}\frac{\partial\Pi_{\varkappa\lambda}}{\partial\lambda} - \frac{\partial G}{\partial\lambda}\frac{\partial\Pi_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa} = 0.$$

Cette dernière, intégrée, donne

(6) $$\Pi_{\varkappa\lambda} = F(G),$$

F désignant une fonction arbitraire. Mais, comme $\Pi_{\varkappa\lambda}$ est une fonction homogène rationnelle et entière de $\varkappa$, λ, on ne peut avoir que $\Pi_{\varkappa\lambda} = CG^{\rho}$, ρ étant un nombre entier et C une quantité indépendante de $\varkappa$, λ. Si maintenant on pose $\varkappa = 1$, $\lambda = 0$, il vient $G = 1$, d'où $C = \Pi$. L'équation (6) se transforme donc en

(7) $$\Pi_{\varkappa\lambda} = G^{\rho}\Pi,$$

c'est-à-dire que Π est un combinant, ce qu'il fallait démontrer. On reconnaît en même temps que *le facteur* M *dans* (3) *est toujours une puissance de l'expression*

$$G = \varkappa^4 - S\varkappa^2\lambda^2 - \frac{4}{3}\varkappa\lambda^3 - \frac{1}{12}S^2\lambda^4.$$

La circonstance que dans le développement (4) le second terme doit manquer est ici confirmée par le fait que le second terme manque aussi dans G, et par conséquent dans toute puissance de G.

Actuellement, considérons conjointement avec N les deux formes mixtes suivantes, qui sont également du quatrième ordre et de la première classe :

(8) $$\begin{cases} L = b_n N_x^2 b_x (bNu) = L_x^4 u_l, \\ M = \beta_n N_x^2 \beta_x (\beta N u) = M_x^4 u_m. \end{cases}$$

En vertu de (2) et en vertu de l'égalité $\delta\Delta = \frac{1}{2} S f$, ces fonctions sont liées entre elles de telle façon que

$$(9) \qquad \delta L = M, \quad \delta M = \frac{1}{2} S L.$$

Exprimons maintenant L et M par les symboles de f et Δ. On tire L de

$$N_x^3 N_y u_n = \frac{1}{2}(a\alpha u) a_x \alpha_x (a_x \alpha_y + a_y \alpha_x)$$

en remplaçant 1° les quantités y par les déterminants des quantités u et b, 2° u par b, puis en multipliant par b_x; on a ainsi

$$L = \frac{1}{2}(a\alpha b) a_x \alpha_x b_x [a_x (b\alpha u) + \alpha_x (bau)].$$

Des deux parties du second membre, la première revient à la seconde si l'on permute a, b et qu'on prenne la demi-somme de l'ancienne expression et de la nouvelle. On a alors

$$(a\alpha b)(b\alpha u) a_x^2 \alpha_x b_x = \frac{1}{2}(a\alpha b) a_x \alpha_x b_x [(b\alpha u) a_x - (a\alpha u) b_x],$$

$$= \frac{1}{2}(a\alpha b) a_x \alpha_x b_x [(bau)\alpha_x - (a\alpha b) u_x],$$

$$= \frac{1}{2}(abx)(abu)\alpha_x^2 a_x b_x - \frac{1}{12} u_x S f,$$

car, d'après ce qui a été dit (p. 290), on a

$$(ab\alpha)^2 a_x b_x \alpha_x = \frac{1}{3}\delta\Delta = \frac{1}{6} S f.$$

Si l'on porte ce résultat dans l'expression précédente de L, il vient

$$(10) \qquad L = \frac{3}{4}(abu)(ab\alpha) a_x b_x \alpha_x^2 - \frac{1}{24} S f u_x.$$

On a également

$$M = \frac{1}{2}(a\alpha\beta) a_x \alpha_x \beta_x [(\beta\alpha u) a_x + (\beta a u)\alpha_x];$$

mais, si l'on procède à l'égard du second terme comme on l'a fait plus haut vis-à-vis du premier de L, on aura

$$(a\alpha\beta)(\beta a u) a_x \alpha_x^2 \beta_x = -\frac{1}{2}(a\alpha\beta)(u\alpha\beta) a_x^2 \alpha_x \beta_x + \frac{1}{2} u_x (a\alpha\beta)^2 a_x \alpha_x \beta_x.$$

Le facteur de $\frac{1}{2} u_x$ est la quantité désignée par Δ_2 dans le développement de Δ_λ (p. 298) et a conséquemment la valeur $\frac{1}{3} Tf - \frac{1}{6} S\Delta$; si l'on porte le tout dans l'expression de M, il vient

$$(11) \qquad M = -\frac{3}{4}(\alpha\beta a)(\alpha\beta u) a_x^2 \alpha_x \beta_x + \frac{1}{24} u_x (2Tf - S\Delta).$$

Il est nécessaire de calculer d'abord, au moyen des formes f, Δ, L, M, N, certaines formations simultanées qui donnent lieu à différents groupes d'équations. Pour abréger, nous désignerons à l'occasion les formes mixtes par une simple lettre minuscule, c'est-à-dire que nous négligerons les facteurs symboliques L_x^4, M_x^4, N_x^4 et que nous écrirons

$$u_l \text{ au lieu de } L_x^4 u_l, \quad u_m \text{ au lieu de } M_x^4 u_m, \quad u_n \text{ au lieu de } N_x^4 u_n;$$

les grandeurs l, m, n sont alors des quantités effectives, et l'on a

$$l_i = \frac{\partial L}{\partial u_i}, \quad m_i = \frac{\partial M}{\partial u_i}, \quad n_i = \frac{\partial N}{\partial u_i}.$$

Les formations à calculer sont les suivantes (¹) :

I.	$a_x^2 a_l$,	$\alpha_x^2 \alpha_l$,	$a_x^2 a_m$,	$\alpha_x^2 \alpha_m$,	$a_x^2 a_n$,	$\alpha_x^2 \alpha_n$;
II.	$a_x a_l^2$,	$\alpha_x \alpha_l^2$,	$a_x a_m^2$,	$\alpha_x \alpha_m^2$,	$a_x a_n^2$,	$\alpha_x \alpha_n^2$;
III.	$a_x a_l a_m$,	$a_x a_m a_n$,	$a_x a_n a_l$,	$\alpha_x \alpha_l \alpha_m$,	$\alpha_x \alpha_m \alpha_n$,	$\alpha_x \alpha_n \alpha_l$;
IV.	(lmx),	(mnx),	(nlx),	(lmn).		

(¹) *Voir*, sur ce qui suit, CLEBSCH et GORDAN, *Math. Annalen*, t. I, p. 56 et suiv. C'est dans ce travail que les formes mixtes L et M ont été introduites pour la première fois, et que les formules relatives à la représentation typique ont été établies.

Pour le système I nous avons, d'après (10) et (11),

$$(12)\quad\begin{cases} c_x^2 c_l = \dfrac{3}{4}(abc)(ab\alpha)a_x b_x \alpha_x^2 c_x^2 - \dfrac{1}{24}Sf^2,\\ \gamma_x^2\gamma_l = \dfrac{3}{4}(ab\gamma)(ab\alpha)a_x b_x \alpha_x^2\gamma_x^2 - \dfrac{1}{24}S\Delta f,\\ c_x^2 c_m = -\dfrac{3}{4}(\alpha\beta a)(\alpha\beta c)\alpha_x\beta_x a_x^2 c_x^2 + \dfrac{1}{24}f(2Tf - S\Delta),\\ \gamma_x^2\gamma_m = -\dfrac{3}{4}(\alpha\beta a)(\alpha\beta\gamma)\alpha_x\beta_x a_x^2\gamma_x^2 + \dfrac{1}{24}\Delta(2Tf - S\Delta). \end{cases}$$

Les premiers termes des seconds membres, dans la deuxième et la troisième équation, sont précisément les formes désignées précédemment par φ, φ'' (p. 319) et peuvent en conséquence s'exprimer par f, Δ et le combinant ψ. Le premier terme du second membre de la première équation est, par suite de la permutabilité de a, b, c, égal à

$$\frac{1}{4}(abc)\alpha_x a_x b_x c_x[(ab\alpha)c_x - (ac\alpha)b_x - (cb\alpha)a_x]$$

ou

$$\frac{1}{4}(abc)^2 a_x b_x c_x \alpha_x^3 = \frac{1}{4}\Delta^2.$$

On trouve de même que le premier terme du second membre de la dernière équation est, à cause de la permutabilité de α, β, γ, égal à $-\frac{1}{4}\Delta_3 f$, Δ_3 devant (p. 299) être fait égal à $\frac{1}{12}S^2f - \frac{1}{3}T\Delta$. Les équations (12) se transforment donc en les suivantes :

$$\begin{aligned} a_x^2 a_l &= \frac{1}{4}\Delta^2 - \frac{1}{24}Sf^2,\\ \alpha_x^2\alpha_l &= -\psi - \frac{1}{12}Tf^2 + \frac{1}{12}S\Delta f,\\ a_x^2 a_m &= \psi - \frac{1}{12}Tf^2 + \frac{1}{12}S\Delta f,\\ \alpha_x^2\alpha_m &= \frac{1}{6}T\Delta f - \frac{1}{48}S^2f^2 - \frac{1}{24}S\Delta^2. \end{aligned}$$

Les expressions qui figurent maintenant dans les seconds membres peuvent s'exprimer très-simplement en fonction des se-

condes dérivées partielles de la forme binaire biquadratique $G(\varkappa, \lambda)$, si l'on y pose $\varkappa = \Delta$, $\lambda = -f$ et qu'on ait égard aux valeurs de G_{11}, G_{12}, G_{22} données page 301. Si donc on pose, pour abréger,

$$(13) \qquad \Gamma = G(\Delta, -f), \quad \Gamma_i = G_i(\Delta, -f), \quad \Gamma_{ik} = G_{ik}(\Delta, -f),$$

et qu'on ait égard aux équations évidentes $a_x^2 a_n = 0$, $\alpha_x^2 \alpha_n = 0$, on a, *pour les formations désignées sous le n° I, les valeurs*

$$(14) \quad \begin{cases} a_x^2 a_l = \frac{1}{4}\Gamma_{11}, & \alpha_x^2 \alpha_l = \frac{1}{4}\Gamma_{12} - \psi, \\ a_x^2 a_m = \frac{1}{4}\Gamma_{12} + \psi, & \alpha_x^2 \alpha_m = \frac{1}{4}\Gamma_{22}, \\ a_x^2 a_n = 0, & \alpha_x^2 \alpha_n = 0. \end{cases}$$

Nous passons à l'examen des formations II. On a évidemment

$$a_x a_n^2 = \Sigma\Sigma f_{ik} n_i n_k = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_1 & \Delta_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_2 & \Delta_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_3 & \Delta_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 & 0 \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

ou, si l'on chasse les quantités f_i,

$$= \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & 0 & \Delta_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & 0 & \Delta_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & 0 & \Delta_3 \\ 0 & 0 & 0 & -f & -\Delta \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & -\Delta & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} f\varphi - \frac{1}{6}\Delta^3,$$

et, si l'on exprime de nouveau φ en ψ, Δ, f (p. 320),

$$(15) \quad \begin{cases} a_x a_n^2 = -\frac{1}{6}\Delta^3 + \frac{1}{2} f\left(-\frac{4}{3}\psi - \frac{1}{9}\mathrm{T}f^2 + \frac{1}{6}\mathrm{S}\Delta f\right) \\ \qquad = -\frac{1}{6}\Gamma_1 - \frac{2}{3}\psi f, \end{cases}$$

Γ_1 étant encore défini par (13). En appliquant à cette équation le procédé δ et en observant que l'on a, en vertu d'une proposition

précédente sur les combinants (p. 394), $\delta N = 0$ et $\delta\psi = 0$, on trouve

(16) $$\alpha_x \alpha_n^2 = -\frac{1}{6}\Gamma_2 - \frac{2}{3}\Delta\psi.$$

Dans le calcul de $a_x a_l^2$, $\alpha_x \alpha_l^2$, $a_x a_m^2$, $\alpha_x \alpha_m^2$, on trouve en même temps les formes $a_x a_l a_m$, et cela au moyen de calculs symboliques très-simples. On a, d'après (10) et d'après (40) (p. 299),

(17) $$a_x a_l^2 = \frac{3}{4}(bc\alpha)(bca)a_x b_x c_x \alpha_x^2 a_l - \frac{1}{4}\Delta_1 a_x^2 a_l.$$

Si nous permutons, dans le premier terme du second membre, les symboles a, c ou a, b, et que nous écrivions, au lieu de ce terme, le tiers de la somme des expressions ainsi obtenues, il vient, à la place de $3(bc\alpha)a_l$, la réunion de termes

$$(bc\alpha)a_l - (ac\alpha)b_l - (ba\alpha)c_l = (abc)\alpha_l,$$

et l'on a par suite, d'après (14),

(18) $$a_x a_l^2 = -\frac{1}{4}\Delta\psi - \frac{1}{16}\Delta_1\Gamma_{11} + \frac{1}{16}\Delta\Gamma_{12}.$$

Si l'on échange ensuite dans (17) les lettres grecques avec les lettres latines, l se transforme en $-m$, Δ_1 en Δ_2, f en Δ, et l'on a en conséquence

(19) $$\left\{\begin{aligned} \alpha_x \alpha_m^2 &= -\frac{3}{4}(\beta\gamma a)(\beta\gamma\alpha)\alpha_x\beta_x\gamma_x a_x^2 \alpha_m + \frac{1}{4}\Delta_2 \alpha_x^2 \alpha_m \\ &= -\frac{1}{4}\Delta_3 a_x^2 a_m + \frac{1}{4}\Delta_2 \alpha_x^2 \alpha_m, \\ &= -\frac{1}{4}\Delta_2\psi - \frac{1}{16}\Delta_3\Gamma_{12} + \frac{1}{16}\Delta_2\Gamma_{22}. \end{aligned}\right.$$

On tire immédiatement de (17) $a_x a_l a_m$ en remplaçant dans le second membre l par m; on trouve alors

(20) $$\left\{\begin{aligned} a_x a_l a_m &= \frac{1}{4}\Delta \alpha_x^2 \alpha_m - \frac{1}{4}\Delta_1 a_x^2 a_m \\ &= -\frac{1}{4}\Delta_1\psi - \frac{1}{16}\Delta_1\Gamma_{12} + \frac{1}{16}\Delta_2\Gamma_{22}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on remplace au contraire, dans (19), une fois m par l, on trouve

$$(21)\quad \begin{cases} \alpha_x \alpha_l \alpha_m = -\frac{1}{4}\Delta_3 a_x^2 a_l + \frac{1}{4}\Delta_2 \alpha_x^2 \alpha_l \\ \qquad = -\frac{1}{4}\Delta_2\psi - \frac{1}{16}\Delta_3\Gamma_{11} + \frac{1}{16}\Delta_2\Gamma_{12}. \end{cases}$$

Pour trouver enfin $a_x a_m^2$, $\alpha_x \alpha_l^2$, on soumet $a_x a_l^2$, $\alpha_x \alpha_m^2$ au procédé δ, et l'on obtient ainsi les fonctions cherchées en même temps que les fonctions connues $a_x a_l a_m$, $\alpha_x \alpha_l \alpha_m$. On a d'ailleurs à faire usage des formules suivantes, qui ont été établies précédemment (p. 289 et suiv.) :

$$\delta f = \Delta,\quad \delta\Delta = 3\Delta_1 = \frac{1}{2}Sf,\quad \delta\Delta_1 = 2\Delta_2 + \frac{1}{2}S\Delta,\quad \delta\Delta_2 = \Delta_3 + S\Delta_1,$$
$$\delta\Delta_3 = \frac{3}{2}S\Delta_2,\quad \delta S = 4T,\quad \delta T = S^2,\quad \delta\psi = 0.$$

On trouve alors en premier lieu

$$(22)\quad \begin{cases} \delta\Gamma_{11} = \delta\left(\Delta^2 - \frac{1}{6}Sf^2\right) = 2\Gamma_{12}, \\ \delta\Gamma_{12} = \delta\left(\frac{1}{3}S\Delta f - \frac{1}{3}Tf^2\right) = \Gamma_{22} + \frac{1}{2}S\Gamma_{11}, \\ \delta\Gamma_{22} = \delta\left(-\frac{1}{6}S\Delta^2 + \frac{2}{3}T\Delta f - \frac{1}{12}S^2 f^2\right) = S\Gamma_{12}, \end{cases}$$

d'où, en vertu de (9),

$$\begin{aligned} \delta a_x a_l^2 &= \alpha_x \alpha_l^2 + 2a_x a_l a_m \\ &= -\frac{3}{4}\Delta_1\psi - \frac{1}{8}\Delta_2\Gamma_{11} + \frac{1}{16}\Delta_1\Gamma_{12} + \frac{1}{16}\Delta\Gamma_{22}, \\ \delta\alpha_x\alpha_m^2 &= \frac{1}{2}S a_x a_m^2 + S\alpha_x\alpha_l\alpha_m \\ &= -\frac{3}{8}S\Delta_2\psi - \frac{1}{32}S\Delta_2\Gamma_{12} - \frac{1}{32}\Delta_3 S\Gamma_{11} + \frac{1}{16}S\Delta_1\Gamma_{22}. \end{aligned}$$

Nous introduirons dans ces formules les formes Δ_i (p. 299) au lieu des quantités Γ_{ik} au moyen des équations

$$\Gamma_{11} = \Delta^2 - f\Delta_1,\quad \Gamma_{12} = \Delta\Delta_1 - f\Delta_2,\quad \Gamma_{22} = \Delta\Delta_2 - f\Delta_3;$$

les formules précitées donnent alors, à cause de (20) et (21), les deux formations cherchées sous la forme

$$(23)\quad \begin{cases} \alpha_x \alpha_l^2 = -\frac{1}{4}\Delta_1\psi + \frac{1}{16}f(\Delta_3\Delta - \Delta_1\Delta_2) + \frac{3}{16}\Delta(\Delta_1^2 - \Delta\Delta_2), \\ a_x a_m^2 = -\frac{1}{4}\Delta_2\psi + \frac{1}{16}\Delta(\Delta_3\Delta - \Delta_1\Delta_2) + \frac{3}{16}f(\Delta_2^2 - \Delta_1\Delta_3). \end{cases}$$

Ces formes peuvent s'écrire d'une manière plus abrégée si l'on introduit encore les secondes dérivées partielles de $S_{\varkappa\lambda}$ par rapport à $\varkappa$ et λ, divisées par 12, et les troisièmes dérivées de $G(\varkappa, \lambda)$, divisées par 24, pour $\varkappa = \Delta$, $\lambda = -f$, c'est-à-dire les expressions

$$(24)\quad S_{11} = 6(\Delta_1^2 - \Delta\Delta_2), \quad S_{12} = 3(\Delta_1\Delta_2 - \Delta\Delta_3), \quad S_{22} = 6(\Delta_2^2 - \Delta_1\Delta_3).$$

$$(25)\quad \Gamma_{111} = \Delta, \quad \Gamma_{112} = \Delta_1, \quad \Gamma_{122} = \Delta_2, \quad \Gamma_{222} = \Delta_3.$$

On obtient alors, sous le bénéfice des équations (15), (16), (18) et (19), *pour les formes citées plus haut sous le n° II, les représentations suivantes :*

$$(26)\quad \begin{cases} a_x a_n^2 = -\frac{1}{6}\Gamma_1 \quad - \frac{2}{3}\psi f, \quad \alpha_x \alpha_n^2 = -\frac{1}{6}\Gamma_2 \quad - \frac{2}{3}\psi\Delta, \\ a_x a_l^2 = -\frac{1}{4}\Gamma_{111}\psi + \frac{1}{96}S_{11}f, \quad \alpha_x \alpha_m^2 = -\frac{1}{4}\Gamma_{222}\psi + \frac{1}{96}S_{22}\Delta, \\ a_x a_m^2 = -\frac{1}{4}\Gamma_{122}\psi + \frac{1}{32}S_{22}f - \frac{1}{48}S_{12}\Delta, \\ \alpha_x \alpha_l^2 = -\frac{1}{4}\Gamma_{112}\psi - \frac{1}{48}S_{12}f + \frac{1}{32}S_{11}\Delta. \end{cases}$$

Nous avons déjà trouvé dans les équations (20) et (21) deux des formations désignées sous le n° III. Parmi les quatre autres, on détermine d'abord $a_x a_n a_l$ en remplaçant dans (10) les u_i par les c_i et en multipliant par $c_x(ca\alpha)a_x^2\alpha_x^2 = c_x c_n$. Par là, L se transforme en $a_x a_n a_l$; l'expression $(ca\alpha)c_x^2 a_x^2 \alpha_x^2$ provenant de u_n s'annule et $(abu)(ab\alpha)\, a_x b_x \alpha_x^2$ se transforme en

$$\begin{aligned}&(abc)(ab\alpha)(cd\beta)a_x b_x c_x d_x^2 \alpha_x^2 \beta_x^2 \\ &\quad = \frac{1}{3}(abc)a_x b_x c_x d_x^2 \alpha_x^2 \beta_x^2[(ab\alpha)(cd\beta) - (cb\alpha)(ad\beta) - (ac\alpha)(bd\beta)] \\ &\quad = \frac{1}{3}(abc)^2 a_x b_x c_x\, (\alpha d\beta)\alpha_x^2 \beta_x^2 d_x^2 = 0,\end{aligned}$$

et l'on a en conséquence la formule

$$a_x a_n a_l = 0, \tag{27}$$

d'où, par application réitérée du procédé δ suivant (9),

$$\alpha_x \alpha_n \alpha_l + a_x a_n a_m = 0, \tag{28}$$

$$\alpha_x \alpha_n \alpha_m = 0. \tag{29}$$

Enfin les expressions $\alpha_x\alpha_n\alpha_l$ et $a_x a_n a_m$, qui d'après (28) sont égales et de signes contraires, s'obtiennent par la considération de la première polaire formée de $\varphi' = \varphi'^6_x$ (p. 319) :

$$\left\{\begin{aligned} 6\varphi'^5_x\varphi'_y &= (a\beta b)(a\alpha\beta)[\beta_x\alpha^2_x b^2_x a_y + \beta_y\alpha^2_x b^2_x a_x \\ &\qquad + 2\beta_x\alpha^2_x b_x b_y a_x + 2\beta_x\alpha_x\alpha_y b^2_x a_x] \\ &= \mathrm{A} + \mathrm{A}' + 2\mathrm{B} + 2\mathrm{B}'. \end{aligned}\right. \tag{30}$$

Le sens des grandeurs A, A′, B, B′ sera par là facile à apercevoir. Actuellement, en vertu de la permutabilité de α, β, on trouve

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{A} &= \frac{1}{2} a_y b^2_x \alpha_x \beta_x (a\alpha\beta)[(a\beta b)\alpha_x - (a\alpha b)\beta_x] \\ &= \frac{1}{2} a_y b^2_x \alpha_x \beta_x (a\alpha\beta)[(\alpha\beta b)a_x - (a\alpha\beta)b_x] \end{aligned}\right. \tag{31}$$

ou, en transformant la première partie d'après (11) et ayant égard à ce que le facteur de $b^3_x = f$ dans le second terme ne varie pas si l'on permute les x, y pour $(\Delta_2)^3_x = \Delta_2$ (ce qu'on démontre facilement),

$$\mathrm{A} = -\frac{2}{3} a_m a_x a_y + \frac{1}{6}\Delta_2 a^2_x a_y - \frac{1}{2}(\Delta_2)^2_x(\Delta_2)_y f.$$

Le terme A′, dans (30), dérive de A par permutation des a, b avec les β, α ; f s'échange alors avec Δ, Δ_2 avec Δ_1, M avec $-$L et l'on a par suite

$$\mathrm{A}' = \frac{2}{3}\alpha_l\alpha_x\alpha_y + \frac{1}{6}\Delta_1\alpha^2_x\alpha_y - \frac{1}{2}(\Delta_1)^2_x(\Delta_1)_y\Delta.$$

Pour l'expression B nous trouvons, par permutation de α, β,

$$\begin{aligned} \mathrm{B} &= \frac{1}{2}\alpha_x\beta_x b_x b_y a_x (a\alpha\beta)[(a\beta b)\alpha_x - (a\alpha b)\beta_x] \\ &= \frac{1}{2}\alpha_x\beta_x b_x b_y a_x (a\alpha\beta)[(\alpha\beta b)a_x - (a\alpha\beta)b_x]. \end{aligned}$$

Ici la première partie est égale à la première partie de A dans (31), car elle se réduit à cette dernière par permutation de a avec b, tandis que la seconde partie de B est égale à $-\frac{1}{2}\Delta_2 b_x^2 b_y$. Il vient donc

$$B = -\frac{2}{3} a_m a_x a_y - \frac{1}{3} \Delta_2 a_x^2 a_y.$$

Si l'on imagine que dans cette expression les a, b aient été de nouveau permutés avec les β, α, on obtient

$$B' = \frac{2}{3} \alpha_l \alpha_x \alpha_y - \frac{1}{3} \Delta_1 \alpha_x^2 \alpha_y.$$

En portant finalement dans (30) les valeurs trouvées pour A, A', B, B' et exprimant encore Δ_1, Δ_2 par f, Δ, on aura

$$6\varphi_x'^5 \varphi_y' = -2a_m a_x a_y + 2\alpha_l \alpha_x \alpha_y - \frac{1}{3} T f a_x^2 a_y.$$

Que l'on exprime encore φ' par ψ (p. 319), le terme multiplié par T disparaît aussi et il reste

$$(32) \qquad 2\psi_x^5 \psi_y = a_m a_x a_y - \alpha_l \alpha_x \alpha_y.$$

De cette formule résulte enfin, si l'on pose $y_i = n_i = (a\alpha)_i a_x \alpha_x^2$ et que l'on ait égard à la définition du combinant Ω donnée pages 315 et 316

$$(33) \qquad 2\Omega = a_x a_m a_n - \alpha_x \alpha_n \alpha_l.$$

Sous le bénéfice de (20), (21), (24), (25), (27), (28), (29), *on trouve donc pour les formes désignées sous le n° III le système suivant d'équations :*

$$(34) \qquad \left\{ \begin{aligned} a_x a_l a_m &= -\frac{1}{4}\Gamma_{112}\psi + \frac{1}{48} S_{12} f - \frac{1}{96} S_{11}\Delta, \\ \alpha_x \alpha_l \alpha_m &= -\frac{1}{4}\Gamma_{122}\psi - \frac{1}{96} S_{22} f + \frac{1}{48} S_{12}\Delta, \\ a_x a_m a_n &= \Omega, \quad \alpha_x \alpha_m \alpha_n = 0, \\ a_x a_n a_l &= 0, \quad \alpha_x \alpha_n \alpha_l = -\Omega. \end{aligned} \right.$$

A présent, le calcul des formes désignées sous le n° IV (p. 397)

marche très simplement. De (10) résulte d'abord

$$(lyx) = \frac{3}{4}(ab\alpha)a_x b_x \alpha_x^2 (a_y b_x - b_y a_x)$$
$$= \frac{3}{2}(ab\alpha)a_x b_x^2 \alpha_x^2 a_y = \frac{3}{2} a_n a_x a_y.$$

En remplaçant ici les y_i par n_i et m_i respectivement on trouve, d'après (26) et (34),

$$(35)\quad \begin{cases} (lnx) = \frac{3}{2} a_x a_n^2 = -\frac{1}{4}\Gamma_1 - \psi f, \\ (lmx) = \frac{3}{2} a_x a_m a_n = \frac{3}{2}\Omega, \end{cases}$$

et de la première de ces équations résulte, par application du procédé δ,

$$(36)\quad (mnx) = \frac{3}{2}\alpha_x \alpha_n^2 = -\frac{1}{4}\Gamma_2 - \psi\Delta.$$

Pour le calcul de (lmn) nous ferons usage de l'identité

$$(lmn)u_x = (lmx)u_n + (mnx)u_l + (lxn)u_m$$
$$= \frac{3}{2}\Omega N + \frac{1}{4}(\Gamma_1 M - \Gamma_2 L) + \psi(fM - \Delta L).$$

On a maintenant, d'après (35) et (14),

$$(37)\quad \begin{cases} \frac{3}{2}\Omega N = (lmx)(a\alpha u)a_x^2\alpha_x^2 \\ = \begin{vmatrix} u_x & L & M \\ f & a_x^2 a_l & a_x^2 a_m \\ \Delta & \alpha_x^2 \alpha_l & \alpha_x^2 \alpha_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & L & M \\ f & \frac{1}{4}\Gamma_{11} & \frac{1}{4}\Gamma_{12} + \psi \\ \Delta & \frac{1}{4}\Gamma_{12} - \psi & \frac{1}{4}\Gamma_{22} \end{vmatrix} \\ = u_x\left(\psi^2 - \frac{1}{96}S_{\Delta,-f}\right) - \frac{1}{4}(\Gamma_1 M - \Gamma_2 L) - \psi(Mf - L\Delta), \end{cases}$$

car on a, d'après l'équation (49) (p. 302),

$$(38)\quad \begin{cases} S_{\Delta,-f} = -6(\Gamma_{11}\Gamma_{22} - \Gamma_{12}^2) \\ = S\Delta^4 - 4T\Delta^3 f + S^2\Delta^2 f^2 - \frac{2}{3}ST\Delta f^3 + \left(\frac{2}{3}T^2 - \frac{1}{12}S^3\right)f^4. \end{cases}$$

Si l'on porte la valeur trouvée pour ΩN dans l'équation donnée pour $(lmn)u_x$, il ne reste plus dans le second membre que des termes multipliés par u_x, de sorte qu'on trouve directement (lmn). En y adjoignant les équations (35) et (36), *on a, pour les quatre déterminants fonctionnels formés avec les quatre formes mixtes linéaires* L, M, N, u_x, *les valeurs suivantes,*

$$(39)\quad \begin{cases} (lmx) = \frac{3}{2}\Omega, & (nlx) = \frac{1}{4}\Gamma_1 + \psi f, \\ (mnx) = -\frac{1}{4}\Gamma_2 - \psi\Delta, & (lmn) = \psi^2 - \frac{1}{96}S_{\Delta,-f}, \end{cases}$$

$S_{\Delta,-f}$ *étant défini par* (38). Nous aurons, par là, calculé toutes les formations simultanées de f, Δ, L, M, N nécessaires pour ce qui suit.

Les formules développées ici donnent encore un résultat remarquable dont nous ferons plusieurs fois usage [1] et que pour cette raison nous allons immédiatement établir. En posant dans (32) $y_i = l_i$ ou $y_i = m_i$ et en appliquant les équations (26) et (34), on obtient

$$(40)\qquad \psi_x^5\psi_l = -\frac{1}{48}S_1, \quad \psi_x^5\psi_m = -\frac{1}{48}S_2,$$

S_1, S_2 désignant les dérivées partielles divisées par 4 de $S_{\varkappa\lambda}$ pour $\varkappa = \Delta$, $\lambda = -f$. Si l'on pose maintenant, dans l'équation (37), $u_i = \psi_x^5\psi_i$, celle-ci se transforme en

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= \frac{2}{3}\psi\left(\psi^2 - \frac{1}{96}S_{\Delta,-f}\right) - \frac{1}{6}\psi_x^5\psi_m(\Gamma_1 + 4\psi f) + \frac{1}{6}\psi_x^5\psi_l(\Gamma_2 + 4\psi\Delta) \\ &= \frac{2}{3}\psi\left(\psi^2 - \frac{1}{96}S_{\Delta,-f}\right) + \frac{1}{288}(\Gamma_1 S_2 - \Gamma_2 S_1) - \frac{1}{72}\psi(S_1\Delta - S_2 f). \end{aligned}$$

On peut enfin ici introduire encore l'argument $T_{\varkappa\lambda}$ pris pour $\varkappa = \Delta$, $\lambda = -f$, car on a (p. 302)

$$(41)\qquad T_{\Delta,-f} = \Gamma_1 S_2 - \Gamma_2 S_1.$$

On reconnaît ainsi que le carré de la forme Ω (*c'est-à-dire le*

---

[1] *Voir* aussi la Section du Tome III sur les intégrales algébriques qui appartiennent à une courbe.

déterminant fonctionnel de f, Δ, et ψ divisé par 54) peut s'exprimer par les formes f, Δ, ψ elles-mêmes, et cela au moyen de l'équation (1)

$$(42) \qquad 24^2\Omega^2 = 384\psi^3 - 12\psi S_{\Delta,-f} + 2T_{\Delta,-f},$$

où $S_{\Delta,-f}$ *et* $T_{\Delta,-f}$ *sont définis respectivement par* (38) *et* (41).

Actuellement, aux formes mixtes L, M et u_x nous joindrons une nouvelle forme mixte de la première classe et du septième ordre qui a la propriété combinante, savoir

$$(43) \qquad K = L\Delta - fM + 2\psi u_x = u_k K_x^7.$$

On a en effet, en vertu de (9), $\partial K = 0$, ce qui, d'après les considérations présentées plus haut, *caractérise* K *comme combinant* (2). Pour ces nouvelles formes mixtes, nous avons encore, en vertu de ce qui va suivre, à calculer les formations

$$a_x^2 a_k, \quad \alpha_x^2 \alpha_k, \quad a_x a_k^2, \quad \alpha_x \alpha_k^2, \quad a_x a_n a_k, \quad \alpha_x \alpha_n \alpha_k.$$

On les trouve aisément si l'on observe que, d'après la définition de K,

$$(43)^* \qquad k_i = \frac{\partial K}{\partial u_i} = \Delta l_i - f m_i + 2\psi x_i.$$

On déduit immédiatement de là, en vertu de (14),

$$(44) \qquad a_x^2 a_k = \frac{1}{4}\Gamma_1 + \psi f, \quad \alpha_x^2 \alpha_k = \frac{1}{4}\Gamma_2 + \psi\Delta,$$

puis des dernières équations (34)

$$(45) \qquad a_x a_n a_k = -\Omega f, \quad \alpha_x \alpha_n \alpha_k = -\Omega\Delta,$$

et enfin

$$\begin{aligned} a_x a_k^2 &= \Delta^2 a_x a_l^2 - 2\Delta f a_x a_l a_m + f^2 a_x a_m^2 \\ &\quad + 4\psi(\Delta a_x^2 a_l - f a_x^2 a_m) + 4\psi^2 f, \\ \alpha_x \alpha_k^2 &= \Delta^2 \alpha_x \alpha_l^2 - 2\Delta f \alpha_x \alpha_l \alpha_m + f^2 \alpha_x \alpha_m^2 \\ &\quad + 4\psi(\Delta \alpha_x^2 \alpha_l - f \alpha_x^2 \alpha_m) + 4\psi^2 \Delta, \end{aligned}$$

---

(1) *Voir* Brioschi, *Comptes rendus*, 1863, premier semestre, p. 305.

(2) La propriété combinante de K résulte aussi de ce que K peut être déduit de N au moyen de l'équation

$$K = 3 N_{n'} u_n N_x^3 N_x'^4.$$

Voir *Math. Annalen*, t. VI, p. 483, équation (71).

ou, en vertu des dernières équations du système (26) et des premières du système (34), et sous le bénéfice de l'application du théorème d'Euler sur les fonctions homogènes,

$$(46) \qquad a_x a_k^2 = \frac{3}{4}\psi\Gamma_1 + \frac{1}{32} f S_{\Delta,-f}, \quad \alpha_x \alpha_k^2 = \frac{3}{4}\psi\Gamma_2 + \frac{1}{32}\Delta S_{\Delta,-f}.$$

L'élimination qui fournit finalement la représentation paramétrique cherchée de la courbe primitive prend une marche très simple si l'on introduit un nouveau triangle de coordonnées dont les sommets sont donnés par un point fixe x et par les deux points dépendant de x,

$$N \equiv u_n = 0 \quad \text{et} \quad K \equiv u_k = 0,$$

dont nous connaîtrons incessamment la signification géométrique. Les variables courantes étant désignées par y_i, nous avons à introduire à leur place de nouvelles variables ξ, η, ζ au moyen des équations

$$(47) \qquad \begin{cases} \Gamma y_1 = \xi x_1 + \eta n_1 + \zeta k_1, \\ \Gamma y_2 = \xi x_2 + \eta n_2 + \zeta k_2, \\ \Gamma y_3 = \xi x_3 + \eta n_3 + \zeta k_3, \end{cases}$$

Γ étant encore égal à $G(\Delta, -f)$. Les coefficients de la transformation dépendent uniquement de la courbe $f(y) = 0$ et du point arbitraire x; or, comme u_n et u_k sont des combinants, *les coefficients de l'équation transformée dépendent nécessairement aussi des combinants du système* $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$. Pour obtenir la nouvelle équation de courbe, on fera donc mieux d'exprimer d'abord la forme

$$H(y) = \Delta(x) f(y) - f(x)\Delta(y) = \Delta f(y) - f\Delta(y),$$

qui est elle-même un combinant et, égalée à zéro, représente la courbe passant par f du faisceau $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$, de l'exprimer, disons-nous, en fonction de ξ, η, ζ au lieu de représenter directement $f(y)$ comme fonction de ces dernières grandeurs. On a d'abord, d'après une identité connue qui dérive de $(a\alpha u)^3 = 0$, pour $u_i = (xy)_i$ (p. 304 et 321),

$$(48) \qquad H(y) = 3(a_x a_y^2 \alpha_x^2 \alpha_y - a_x^2 a_y \alpha_x \alpha_y^2),$$

les facteurs des termes individuels n'étant plus ici du troisième

degré, mais seulement du premier et du second par rapport aux y. Les formules (47) donnent immédiatement

$$(49)\quad \begin{cases} \Gamma\, a_x^2 a_y = \xi f + \eta a_x^2 a_n + \zeta a_x^2 a_k, \\ \Gamma\, \alpha_x^2 \alpha_y = \xi \Delta + \eta \alpha_x^2 \alpha_n + \zeta \alpha_x^2 \alpha_k, \\ \Gamma^2 a_x a_y^2 = \xi^2 f + 2\xi\eta a_x^2 a_n + 2\xi\zeta a_x^2 a_k + \eta^2 a_x a_n^2 \\ \qquad + 2\eta\zeta a_x a_n a_k + \zeta^2 a_x a_k^2, \\ \Gamma^2 \alpha_x \alpha_y^2 = \xi^2 \Delta + 2\xi\eta \alpha_x^2 \alpha_n + 2\xi\zeta \alpha_x^2 \alpha_k + \eta^2 \alpha_x \alpha_n^2 \\ \qquad + 2\eta\zeta \alpha_x \alpha_n \alpha_k + \zeta^2 \alpha_x \alpha_k^2. \end{cases}$$

En vertu des équations (14), (26), (44), (45) et (46), les coefficients qui figurent dans les seconds membres peuvent toujours s'exprimer de la manière suivante :

$$(50)\quad \begin{cases} a_x^2 a_n = \sigma_1 f + \tau_1 \Gamma_1, & \alpha_x^2 \alpha_n = \sigma_1 \Delta + \tau_1 \Gamma_2, \\ a_x^2 a_k = \sigma_2 f + \tau_2 \Gamma_1, & \alpha_x^2 \alpha_k = \sigma_2 \Delta + \tau_2 \Gamma_2, \\ a_x a_n^2 = \sigma_{11} f + \tau_{11} \Gamma_1, & \alpha_x \alpha_n^2 = \sigma_{11} \Delta + \tau_{11} \Gamma_2, \\ a_x a_n a_k = \sigma_{12} f + \tau_{12} \Gamma_1, & \alpha_x \alpha_n \alpha_k = \sigma_{12} \Delta + \tau_{12} \Gamma_2, \\ a_x a_k^2 = \sigma_{22} f + \tau_{22} \Gamma_1, & \alpha_x \alpha_k^2 = \sigma_{22} \Delta + \tau_{22} \Gamma_2, \end{cases}$$

les grandeurs σ, τ étant définies par

$$(51)\quad \begin{cases} \sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = \psi, \quad \sigma_{11} = -\frac{2}{3}\psi, \quad \sigma_{12} = -\Omega, \quad \sigma_{22} = \frac{1}{32} S_{\Delta,-f}, \\ \tau_1 = 0, \quad \tau_2 = \frac{1}{4}, \quad \tau_{11} = -\frac{1}{6}, \quad \tau_{12} = 0, \quad \tau_{22} = \frac{3}{4}\psi. \end{cases}$$

Si l'on forme donc le déterminant des expressions (49) qui figure dans le second membre de (48), celui-ci se décompose en deux facteurs, dont l'un est

$$\begin{vmatrix} \Delta & \Gamma_2 \\ f & \Gamma_1 \end{vmatrix} = \Gamma = G(\Delta, -f),$$

et, en chassant ce facteur par division, il reste

$$\Gamma^2 H(y) = 3 \begin{vmatrix} \xi + \sigma_1\eta + \sigma_2\zeta & \xi^2 + 2\sigma_1\eta\xi + 2\sigma_2\zeta\xi + \sigma_{11}\eta^2 + 2\sigma_{12}\eta\zeta + \sigma_{22}\zeta^2 \\ \tau_1\eta + \tau_2\zeta & 2\tau_1\eta\xi + 2\tau_2\zeta\xi + \tau_{11}\eta^2 + 2\tau_{12}\eta\zeta + \tau_{22}\zeta^2 \end{vmatrix},$$

ou, en réduisant la seconde ligne verticale à l'aide de la première,

et posant $\sigma_1 = 0$, $\tau_1 = 0$, $\tau_{12} = 0$,

$$\begin{aligned} r^2 H(y) &= 3 \begin{vmatrix} \xi + \sigma_2 \zeta & -\xi^2 + \sigma_{11}\eta^2 + 2\sigma_{12}\eta\zeta + \sigma_{22}\zeta^2 \\ \tau_2 \zeta & \tau_{11}\eta^2 + \tau_{22}\zeta^2 \end{vmatrix} \\ &= 3\xi(\tau_2 \xi\zeta + \tau_{11}\eta^2 + \tau_{22}\zeta^2) + 3\zeta \begin{vmatrix} \sigma_2 & \sigma_{11}\eta^2 + 2\sigma_{12}\eta\zeta + \sigma_{22}\zeta^2 \\ \tau_2 & \tau_{11}\eta^2 + \tau_{22}\zeta^2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Si l'on introduit enfin aussi pour les autres grandeurs σ, τ les valeurs (51), il vient

$$(52)\quad r^2 H(y) = \frac{3}{4}\xi^2\zeta - \frac{1}{2}\xi\eta^2 + \frac{9}{4}\psi\xi\zeta^2 + \frac{3}{2}\Omega\eta\zeta^2 + \frac{3}{4}\left(3\psi^2 - \frac{1}{32}S_{\Delta,-f}\right)\zeta^3.$$

C'est là ce qu'on appelle la représentation typique de $H(y)$; la forme $H(y)$ est ainsi représentée comme fonction rationnelle (mais non comme fonction entière) au moyen des invariants fonctionnels de f (t. I, p. 309 et suiv.) et, pour préciser, au moyen des grandeurs f, Δ, ψ et Ω, f et Δ n'entrant d'ailleurs que dans le combinant $S_{\Delta,-f}$, de sorte que dans (52) tous les coefficients sont des combinants.

On reconnaît sur l'équation (52) que la droite $\zeta = 0$, en son point de rencontre avec $\eta = 0$, c'est-à-dire au point x, touche la courbe $H(y) = 0$, tandis que le point de rencontre de $\zeta = 0$ avec $\xi = 0$, c'est-à-dire $u_n = 0$, est également situé sur la courbe et coïncide par suite avec le point tangentiel de x (p. 262). Mais en même temps, au point $u_n = 0$, la ligne $\xi = 0$ est tangente à la courbe $H(y) = 0$. Comme ensuite la première polaire de x relativement à $H = 0$ apparaît sous la forme

$$\frac{1}{2}\xi\zeta - \frac{1}{6}\eta^2 + \frac{3}{4}\psi\zeta^2 = 0,$$

$\eta = 0$ est la polaire du point $N = 0$ (c'est-à-dire de $\zeta = 0$, $\xi = 0$) par rapport à la première polaire du point x formée pour $H = 0$. Nous aurons ainsi reconnu le sens géométrique de la transformation (47); nous pouvons aussi exprimer le résultat dont il s'agit par le théorème suivant :

Si x est un point quelconque du plan, $N \equiv u_n = 0$ *représente le point tangentiel de x sur la courbe passant par x du faisceau syzygétique* $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$; *d'autre part,* $K \equiv u_k = 0$ *donne le*

point d'intersection de la tangente de cette courbe au point $N = 0$ *avec la polaire de* $N = 0$ *relativement à la conique polaire de* x (¹).

La forme de $H(y)$ permet de vérifier immédiatement l'exactitude des propositions suivantes :

La courbe $\psi = 0$ *est le lieu des points* x *tels que le sommet* $K = 0$ *du triangle* $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0$ *répondant à* x *est situé sur la polaire conique de* x; *la droite* $\xi = 0$ *est la tangente de cette dernière courbe en* $K = 0$.

L'équation $3\psi^2 - \frac{1}{32} S_{\Delta, -f} = 0$ *représente une courbe du douzième ordre pour les points* x *de laquelle le sommet* $K = 0$ *du triangle en question est également situé sur celle des courbes du faisceau syzygétique qui passe par* x.

Pour les soixante-douze points d'intersection x *de* $\psi = 0$ *avec les quatre courbes équianharmoniques du faisceau* $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ *données par* $S_{\Delta, -f} = 0$, *le triangle* $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0$ *répondant à* x *est simultanément inscrit et circonscrit à la courbe du faisceau qui passe par* x; N *est point tangentiel de* x, x *de* K *et* K *de* N.

Et enfin, puisque d'après (42), pour $\psi = 0$, $T_{\Delta, -f} = 0$, on a aussi $\Omega = 0$:

Pour les cent huit points d'intersection de $\psi = 0$ *avec les six courbes harmoniques du faisceau syzygétique données par* $T_{\Delta, -f}$, *le point* $K = 0$ *qui répond à* x *tombe en un point d'inflexion et la tangente de ce dernier est donnée par* $\xi = 0$.

Pour un point x des douze lignes inflexionnelles représentées par $G \equiv \Gamma(\Delta, -f) = 0$, notre représentation typique devient illusoire; en effet, le déterminant de notre transformation (47) s'éva-

---

(¹) On aurait pu reconnaître aussi la même chose directement par la résolution des équations (47) et de quelques transformations des valeurs qui résultent de là pour ξ, η, ζ; *voir* CLEBSCH et GORDAN, *loc. cit.* La signification de $N = 0$ résulte, au surplus, directement de l'identité de Salmon. Le point tangentiel sera indéterminé si H se réduit à un triangle, ce qui concorde avec les résultats de la page 350.

nouit aussi alors, car on a, d'après $(43)^*$ et (39),

$$(53)\quad \begin{cases} (xnk) = \Delta(xnl) - f(xnm), \\ \qquad = \frac{1}{4}(\Gamma_1\Delta - \Gamma_2 f) = \frac{1}{4}\Gamma. \end{cases}$$

Actuellement on peut déduire de (52) des représentations typiques pour tous les invariants fonctionnels de $H(y)$, c'est-à-dire figurer ces derniers de telle sorte que leurs coefficients soient des fonctions rationnelles de f, Δ, ψ et Ω. Nous calculerons seulement ici la forme hessienne Δ_H de $H(y)$. Dans ce but on forme d'abord le déterminant hessien de H relativement à ξ, η, ζ, c'est-à-dire le déterminant des quantités

$$H_{11} = \frac{1}{4}\zeta,\quad H_{22} = -\frac{1}{6}\xi,\quad H_{33} = \frac{3}{4}\psi\xi + \frac{1}{2}\Omega\eta + \frac{3}{4}\left(3\psi^2 - \frac{1}{32}S_{\Delta,-f}\right)\zeta,$$
$$H_{12} = \frac{1}{6}\eta,\quad H_{23} = \frac{1}{2}\Omega\zeta,\quad H_{31} = \frac{1}{4}\xi + \frac{3}{4}\psi\zeta,$$

et on le multiplie par 6 et par le carré du déterminant des équations de transformation qui se tirent de (47) par résolution. Or on déduit des équations (47), en vertu de (53),

$$\xi = 4(ynk),\quad \eta = 4(xyk),\quad \zeta = 4(xny).$$

Mais, d'après le théorème sur les déterminants adjoints, le déterminant de ces équations est égal à $4^3(xnk)^2 = 4\Gamma^2$. Si, d'autre part, nous établissons la forme hessienne pour le premier membre de (52), par conséquent pour $\Gamma^2 H$, cette dernière sera égale à $\Gamma^6\Delta_H$. Par division par Γ^4 dans les deux membres et calcul du déterminant des H_{ik} on trouve donc, en tenant compte pour Ω^2 de l'équation (42) (¹),

$$(54)\quad \begin{cases} \Gamma^2\Delta_H = \xi^3 + 3\psi\xi^2\zeta - 2\psi\xi\eta^2 - 6\Omega\xi\eta\zeta + \frac{3}{32}S_{\Delta,-f}\xi\zeta^2 \\ \qquad - \frac{4}{3}\Omega\eta^3 - \left(6\psi^2 - \frac{1}{16}S_{\Delta,-f}\right)\eta^2\zeta - 12\psi\Omega\eta\zeta^2 \\ \qquad - \left(4\psi^3 - \frac{1}{8}S\psi_{\Delta,-f} + \frac{1}{48}T_{\Delta,-f}\right)\zeta^3. \end{cases}$$

(¹) On a d'autre part, d'après la formule connue relative à $\Delta_{\kappa\lambda}$,

$$\Delta_H = \Gamma_1\Delta(y) - \Gamma_2 f(y);$$

Pour exprimer enfin les coordonnées d'un point y sur la courbe $f(y) = 0$ comme fonctions d'un paramètre, considérons le faisceau de rayons

(55) $$\varkappa a_x^2 a_y - \lambda \alpha_x^2 \alpha_y = 0$$

passant par le point tangentiel $N = 0$ d'un point x de la courbe et calculons les deux autres intersections d'un rayon de ce faisceau avec $f(y) = 0$, ce qui se fait par une équation du second degré. Comme dans notre cas on a $f(x) \equiv f = 0$, on aura $H(y) = \Delta f(y)$ et (p. 301)

$$\Delta_H = \Gamma_1 \alpha_y^3 - \Gamma_2 a_y^3 = \Gamma_1 \alpha_y^3,$$

ou, à cause de $f \equiv a_x^3 = 0$, $\Delta_H = \Delta^3 \alpha_y^3$. Nous pouvons donc remplacer l'équation (55) ensemble avec $f(y) \equiv a_y^3 = 0$ par les équations

$$\varkappa \Delta^2 H_x^2 H_y - \lambda (\Delta_H)_x^2 (\Delta_H)_y = 0, \quad H(y) = 0,$$

où l'on a symboliquement $H_y^3 = H(y)$, $(\Delta_H)_y^3 = \Delta_H$. Mais comme aux valeurs $y_i = x_i$ correspondent les valeurs $\xi = \Gamma$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$, on aura

$$H_x^2 H_y = \frac{1}{6} \sum\sum \frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial y_k} x_i x_k = \frac{1}{6} \Gamma^2 \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2},$$

$$(\Delta_H)_x^2 (\Delta_H)_y = \frac{1}{6} \sum\sum \frac{\partial^2 \Delta_H}{\partial y_i \partial y_k} x_i x_k = \frac{1}{6} \Gamma^2 \frac{\partial^2 \Delta_H}{\partial \xi^2}.$$

Si donc on imagine le tout exprimé par rapport aux variables ξ, η, ζ, on a les deux équations

$$H(y) = 0, \quad \varkappa \Delta^2 \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} - \lambda \frac{\partial^2 \Delta_H}{\partial \xi^2} = 0.$$

---

en ajoutant l'équation de définition relative à H, on trouve

$$\Gamma f(y) = f \Delta_H + \Gamma_1 H(y);$$

c'est là, pour la forme primitive $f(y)$ elle-même, sa représentation typique. On conclut encore de là que *tout invariant fonctionnel de f peut être multiplié par une puissance de Γ telle qu'il devienne une fonction entière des sept formes fondamentales f,* $\Delta, \psi, \Omega, u_x$, N, K. Entre ces dernières existe l'unique relation (42). *Toutes* les relations entre les invariants fonctionnels de f sont donc ramenées à cette équation et à ses expressions au moyen des sept formes fondamentales. *Voir* CLEBSCH et GORDAN, *loc. cit.*

Si entre ces dernières et entre l'équation

$$u_y = 0 \quad \text{ou} \quad u_x\xi + N\eta + K\zeta = 0$$

on élimine les ξ, η, ζ, on obtient le produit des équations de tous les points y où un rayon du faisceau (55) rencontre la courbe primitive $f(y) = 0$. Parmi ces points figure le sommet du faisceau en question ($N = 0$); la forme N sera donc un facteur du résultat de l'élimination.

Parmi les trois équations données deux sont linéaires, savoir :

$$0 = u_x\xi + N\eta + K\zeta,$$
$$0 = \frac{\Gamma^2}{6}\left(\varkappa\Delta^2\frac{\partial^2 H}{\partial\xi^2} - \lambda\frac{\partial^2\Delta_{11}}{\partial\xi^2}\right) \equiv \frac{1}{4}\varkappa\Delta^2\zeta - \lambda(\xi + \psi\zeta).$$

Comme conséquence de ces deux équations on peut donc poser

$$\xi = N\left(\frac{1}{4}\varkappa\Delta^2 - \lambda\psi\right), \quad \zeta = N\lambda,$$
$$\eta = -K\lambda - u_x\left(\frac{1}{4}\varkappa\Delta^2 - \lambda\psi\right).$$

Portant ces valeurs dans $H(y)$ et observant que $S_{\Delta,-f}$, $T_{\Delta,-f}$, pour $f = 0$, se transforment respectivement en $S\Delta^4$ et $T\Delta^6$, on obtient l'équation

$$\begin{aligned}0 = \frac{3}{4}N\Big\{N^2\Big[\left(\frac{1}{4}\varkappa\Delta^2 - \lambda\psi\right)^2\lambda \\ + 3\psi\left(\frac{1}{4}\varkappa\Delta^2 - \lambda\psi\right)\lambda^2 + \left(3\psi^2 - \frac{1}{32}S\Delta^4\right)\lambda^3\Big] \\ - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\varkappa\Delta^2 - \lambda\psi\right)\left[K\lambda + u_x\left(\frac{1}{4}\varkappa\Delta^2 - \lambda\psi\right)\right]^2 \\ - 2\Omega N\left[K\lambda + u_x\left(\frac{1}{4}\varkappa\Delta^2 - \lambda\psi\right)\right]\lambda^2\Big\}.\end{aligned}$$

En faisant abstraction du facteur $\frac{3}{4}N$, inutile pour la question présente, cette équation, en vertu de la relation (42), ne varie pas si, après l'avoir multipliée par $\frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\varkappa\Delta^2 - \lambda\psi\right)$, on retranche dans

le second membre $\frac{9}{4}\Omega^2 N^2 \lambda^4$ et qu'on ajoute en même temps l'expression

$$\left(\frac{3}{2}\psi^3 - \frac{3}{64}\psi S \Delta^4 + \frac{1}{128} T\Delta^6\right) N^2 \lambda^4.$$

Alors, tous les termes multipliés par $\Delta^4\psi$, $\Delta^2\psi^2$ et ψ^3 qui proviennent de la première parenthèse disparaissant, on obtient l'équation

$$\begin{aligned} o = {} & \frac{3}{128}\Delta^6\lambda\left(x^3 - \frac{1}{2}S x\lambda^2 + \frac{1}{3}T\lambda^3\right)N^2 \\ & - \left\{\left(\frac{1}{4}x\Delta^2 - \lambda\psi\right)\left[K\lambda + u_x\left(\frac{1}{4}x\Delta^2 - \lambda\psi\right)\right] + \frac{3}{2}\Omega N \lambda^2\right\}^2, \end{aligned}$$

que l'on peut aussi écrire sous la forme

$$(56)\quad \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{1}{4}x\Delta^2 - \lambda\psi\right)\left[K\lambda + u_x\left(\frac{1}{4}x\Delta^2 - \lambda\psi\right)\right] + \frac{3}{2}\Omega N\lambda^2 \\ & \qquad \pm \frac{1}{4}\Delta^3 N\sqrt{\frac{3}{8}\lambda\left(x^3 - \frac{1}{2}S x\lambda^2 + \frac{1}{3}T\lambda^3\right)} = o. \end{aligned} \right.$$

Les premiers termes de cette équation se simplifient encore si l'on remplace K et ΩN par leurs valeurs en L, M. En tenant compte de $f = o$, on a, en effet, à cause de (37) et (43),

$$K = L\Delta + 2\psi u_x,$$
$$\frac{3}{2}\Omega N = u_x\left(\psi^2 - \frac{1}{96}S\Delta^4\right) - \frac{1}{4}M\Delta^3 + \psi\Delta L.$$

Ces valeurs étant portées dans l'équation (56), celle-ci se transforme, si l'on néglige le facteur $\frac{1}{16}\Delta^3$, en

$$(56)^*\quad \left\{ \begin{aligned} & o = \left(x^2 - \frac{1}{6}S\lambda^2\right)\Delta u_x - 4\lambda^2 M \\ & \qquad + 4x\lambda L \pm N\sqrt{6\lambda\left(x^3 - \frac{1}{2}x\lambda^2 S + \frac{1}{3}\lambda^3 T\right)}. \end{aligned} \right.$$

C'est là l'équation $u_y = o$ d'un point y où un rayon du faisceau $x a_x^2 a_y - \lambda \alpha_x^2 \alpha_y = o$ coupe la courbe $f(y) = o$; le point x est ici un point quelconque de f; son point tangentiel ($N = o$) *est le sommet du faisceau dont il vient d'être parlé;* les formes

L et M sont définies par (10) et (11); Δ, S, T ont les significations connues. Les deux intersections différentes d'un faisceau de rayons s'obtiennent par les deux signes du radical. Les coefficients de u_1, u_2, u_3 dans l'expression en question sont donc les coordonnées mêmes du point variable sur la courbe; *on a, par suite, si* ρ *désigne un facteur arbitraire, ces coordonnées représentées en fonction du paramètre* $\varkappa : \lambda$ *par les équations suivantes, dans lesquelles on a posé* $M = u_m$, $L = u_l$, $N = u_n$ [1] :

$$(57)\quad \begin{cases} \rho y_1 = \Delta\left(\varkappa^2 - \frac{1}{6}S\lambda^2\right)x_1 - 4\lambda^2 m_1 + 4\varkappa\lambda l_1 \pm n_1\sqrt{6\lambda\left(\varkappa^3 - \frac{1}{2}S\varkappa\lambda^2 + \frac{1}{3}T\lambda^3\right)}, \\ \rho y_2 = \Delta\left(\varkappa^2 - \frac{1}{6}S\lambda^2\right)x_2 - 4\lambda^2 m_2 + 4\varkappa\lambda l_2 \pm n_2\sqrt{6\lambda\left(\varkappa^3 - \frac{1}{2}S\varkappa\lambda^2 + \frac{1}{3}T\lambda^3\right)}, \\ \rho y_3 = \Delta\left(\varkappa^2 - \frac{1}{6}S\lambda^2\right)x_3 - 4\lambda^2 m_3 + 4\varkappa\lambda l_3 \pm n_3\sqrt{6\lambda\left(\varkappa^3 - \frac{1}{2}S\varkappa\lambda^2 + \frac{1}{3}T\lambda^3\right)}. \end{cases}$$

Sous le radical [2] apparaît ici l'expression $G_1(\varkappa, -\lambda)$ multipliée par 6λ. Or, comme par l'évanouissement de cette quantité irrationnelle les quatre tangentes du faisceau $\varkappa a_x^2 a_y - \lambda \alpha_x^2 \alpha_y = 0$ issues de $N = 0$ sont déterminées, on reconnaît que, *si l'une de ces tangentes répondant à la valeur* $\lambda = 0$ (*c'est-à-dire celle qui a son point de contact en* x) *est connue, les trois autres sont déterminées par l'équation* $G_1(\varkappa, -\lambda) = 0$. On peut en particulier faire coïncider le point x avec un point d'inflexion, cas où le sommet du faisceau considéré se trouve également en ce point d'inflexiôn. A la valeur $\lambda = 0$ correspond alors la tangente d'inflexion de x, et les racines de l'équation $G_1(\varkappa, -\lambda) = 0$ fournissent les trois autres tangentes de la courbe primitive qui partent de x [3].

---

[1] Une représentation paramétrique semblable a été donnée sous une autre forme par ARONHOLD, *Monatsberichte der Berliner Academie*, 25 avril 1861. C'est à elle que Clebsch a rattaché l'application des fonctions elliptiques, et en particulier de son théorème d'addition aux propositions sur les points d'intersection (*Journal de Crelle*, t. 63, *loc. cit.* Dans les équations correspondantes du Mémoire de Clebsch et Gordan (*Math. Annalen*, t. I, *loc. cit.*), les termes ayant pour coefficient m_i ont été négligés

[2] En dehors de cette racine, l'équation (57) comprend encore une irrationnalité, provenant de ce qu'un point x de la courbe est supposé connu ; or la recherche d'un tel point exige encore la résolution d'une équation du troisième degré.

[3] Comme, d'autre part, $G_1 = 0$ détermine les trois courbes du faisceau syzygétique dont la hessienne est $f = 0$, il en résulte incidemment que *toute courbe du faisceau*

Toutefois, dans les hypothèses faites ici sur la situation de x, nos formules pour la représentation typique de $H(y)$ cessent d'être exactes, car pour $f = 0$, $\Delta = 0$, on aurait aussi $\Gamma = 0$, c'est-à-dire que le premier membre de l'équation (52) qui fournit cette représentation serait nul. En effet, le triangle de coordonnées ($\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0$) dont nous avons fait usage ne peut plus nous servir dans ce cas, puisque ses trois côtés se confondent. Malgré cela, les équations finales (57) subsistent. L'équation (56)*, dont (57) a été déduite, n'est autre en effet que le résultat de l'élimination des y_i entre les équations

$$\varkappa a_x^2 a_y - \lambda \alpha_x^2 \alpha_y = 0, \quad a_y^3 = 0, \quad u_y = 0,$$

et ce résultat doit nécessairement subsister indépendamment du choix du triangle de coordonnées; le triangle que nous avons employé précédemment avait été choisi pour l'obtenir, parce qu'ainsi les coefficients des puissances de $\varkappa$, λ étaient immédiatement donnés dans (56)* comme invariants fonctionnels de la courbe primitive. Maintenant, si l'on pose dans (57) $\Delta = 0$, il vient

$$(58) \quad \rho y_i = -4\lambda^2 m_i + 4\varkappa\lambda l_i \pm n_i \sqrt{6\lambda\left(\varkappa^3 - \frac{1}{2}S\varkappa\lambda^2 + \frac{1}{3}T\lambda^3\right)}.$$

On réintroduira facilement dans (57) les fonctions elliptiques sinam, cosam, Δam; nous commencerons par donner les calculs nécessaires à cet objet, mais on verra que les raisonnements ont une marche beaucoup plus rapide si, au lieu des fonctions sinam, ..., on fait usage d'une nouvelle fonction doublement périodique, qui peut naturellement s'exprimer au moyen de sinam, cosam, Δam. L'introduction de ces dernières fonctions est, en effet, rendue ici plus embarrassée par suite de la circonstance que dans (57) figure sous le radical une expression du troisième ordre, multipliée par λ, qui doit préalablement être amenée à la forme normale $\mu(1-\mu)(1-k^2\mu)$ dont on fait usage pour sinam. Nous devons encore nous occuper en particulier

---

syzygétique est touchée par les tangentes d'inflexion des trois courbes auxquelles elle appartient comme hessienne. On démontre au surplus la chose sans peine directement. *Voir* CLEBSCH, *Ueber die Wendetangenten der Curven dritter Ordnung* (*Journal de Crelle*, t. 58).

de la détermination des points d'inflexion, c'est-à-dire de la détermination des neuf rayons du faisceau $\varkappa a_x^2 a_y - \lambda \alpha_x^2 \alpha_y = 0$ qui réunissent le sommet N de ce dernier aux neuf points en question ; nous verrons comment ce problème, purement algébrique, se résout à l'aide des fonctions elliptiques.

Pour atteindre le but indiqué, introduisons le paramètre $\varkappa$ au lieu de $\varkappa : \lambda$ et désignons par $\varkappa'$, $\varkappa''$, $\varkappa'''$ les racines de l'équation

$$(59) \qquad G_1(\varkappa, -1) \equiv \varkappa^3 - \frac{1}{2} S\varkappa + \frac{1}{3} T = 0,$$

c'est-à-dire posons $\varkappa = \varkappa$, $\lambda = 1$ et

$$\varkappa^3 - \frac{1}{2} S\varkappa + \frac{1}{3} T = (\varkappa - \varkappa')(\varkappa - \varkappa'')(\varkappa - \varkappa''').$$

Faisons ensuite la substitution

$$\varkappa = \mu(\varkappa'' - \varkappa''') + \varkappa''',$$

il vient, par suite de cette dernière,

$$\varkappa^3 - \frac{1}{2} S\varkappa + \frac{1}{3} T = (\varkappa''' - \varkappa'')^2 (\varkappa' - \varkappa''') \mu (1 - \mu)(1 - k^2 \mu)$$

si

$$k^2 = \frac{\varkappa''' - \varkappa''}{\varkappa''' - \varkappa'}.$$

Il suffit actuellement d'introduire un nouveau paramètre u au moyen de l'équation

$$(60) \qquad \mu = \sin^2 \mathrm{am}\, u$$

pour obtenir les relations suivantes :

$$(61) \qquad \varkappa = \varkappa'' \sin^2 \mathrm{am}\, u + \varkappa''' \cos^2 \mathrm{am}\, u,$$

$$(62) \qquad \left\{ \begin{aligned} \sqrt{\varkappa^3 - \frac{1}{2} S\varkappa + \frac{1}{3} T} &= (\varkappa''' - \varkappa'') \sqrt{\varkappa' - \varkappa'''} \sin \mathrm{am}\, u \cos \mathrm{am}\, u \, \Delta \mathrm{am}\, u \\ &= \frac{1}{2} (\varkappa''' - \varkappa'') \sqrt{\varkappa' - \varkappa'''} \, \frac{d \sin^2 \mathrm{am}\, u}{du}, \end{aligned} \right.$$

et ainsi l'intégrale elliptique de première espèce qui appartient à

notre courbe (c'est-à-dire le nouveau paramètre u) sera donnée par

$$(63)\quad \begin{cases} u = \displaystyle\int_0^{\sqrt{\mu}} \frac{d\mu}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-k^2\mu^2)}} = \frac{1}{2}\int_0^{\nu} \frac{d\nu}{\sqrt{\nu(1-\nu)(1-k^2\nu)}} \\ \quad = \dfrac{\sqrt{x'-x'''}}{2} \displaystyle\int_{x'''}^{x} \frac{dx}{\sqrt{x^3 - \frac{1}{2}Sx + \frac{1}{3}T}} \quad (^1). \end{cases}$$

Nos formules (57) se transforment enfin en

$$\rho y_i = \varphi_i(\sin^2 \mathrm{am}\, u) + mc_i \frac{d \sin^2 \mathrm{am}\, u}{du},$$

les quantités c_i désignant des constantes, les quantités φ_i étant des fonctions rationnelles entières du second degré de leur argument, et m étant égal à $(x''' - x'')\sqrt{x' - x'''}$; elles deviennent donc, en réalité, de la forme des équations (31) (p. 389). Si l'on veut, en partant de ces dernières équations (par l'intermédiaire des fonctions H), représenter encore les théorèmes sur les systèmes de points d'intersection par l'évanouissement des sommes correspondantes d'intégrales, il est nécessaire, d'après ce qui précède, de déterminer la valeur de l'intégrale u pour un point d'inflexion ou la valeur correspondante de sin am u. Cette détermination se rattache aux développements qui suivent.

Nous nous proposons d'établir la condition *pour que trois points de la courbe ayant pour paramètres x_1, x_2, x_3 ou pour valeurs intégrales correspondantes u_1, u_2, u_3 soient en ligne droite.* Nous écrirons, pour abréger, les équations (57) sous la forme

$$(64)\qquad \rho y_i = p_i + q_i x + r_i x^2 \pm \alpha_i \sqrt{\varphi(x)},$$

---

(1) Une autre méthode élégante pour réduire par transformation rationnelle l'intégrale elliptique à forme *générale* binaire du quatrième ordre sous le radical du dénominateur, de telle sorte qu'à la place de cette forme se présente la forme cubique dépendant uniquement des invariants i et j $\left(\text{ou, si l'on pose } x\frac{j}{i} \text{ au lieu de } x, \text{ uniquement de l'invariant absolu } \frac{i^3}{j^2}\right)$, a été indiquée par Hermite (*Journal de Crelle*, t. 52, p. 8); *voir* aussi Cayley, *ibid.*, t. 53, et Clebsch, *Theorie der binären Formen*, p. 233.

qui permet d'apercevoir facilement le sens des grandeurs p_i, q_i, r_i, α_i et où $\varphi(x) = G_1(x, -1)$. Si trois points x_1, x_2, x_3 doivent être en ligne droite, il faut nécessairement que le déterminant formé de leurs coordonnées s'évanouisse. Mais ce dernier est égal, en vertu de (64), à la somme des produits formés avec les déterminants correspondants du système incomplet

$$\left\| \begin{matrix} p_1 & q_1 & r_1 & \alpha_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & \alpha_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & \alpha_3 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \sqrt{\varphi(x_1)} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \sqrt{\varphi(x_2)} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \sqrt{\varphi(x_3)} \end{matrix} \right\|,$$

c'est-à-dire que l'on a l'équation

$$(65) \qquad 0 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \sqrt{\varphi(x_1)} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \sqrt{\varphi(x_2)} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \sqrt{\varphi(x_3)} \\ (q r \alpha) & -(r \alpha p) & (\alpha p q) & -(p q r) \end{vmatrix},$$

En ayant égard aux significations des grandeurs p, q, r, α telles qu'elles résultent de (57) et (64), on obtient, pour les déterminants ternaires qui figurent dans la dernière ligne horizontale de (65), les valeurs suivantes :

$$(q r \alpha) = 4\sqrt{6}(l x n)\Delta, \qquad -(r \alpha p) = 4\sqrt{6}(x n m)\Delta,$$
$$(\alpha p q) = 16\sqrt{6}(l m n) + \frac{4}{\sqrt{6}}(n l x)\mathrm{S}\Delta, \quad -(p q r) = -16(l m x)\Delta,$$

ou, en vertu des équations (39) (p. 406) et de $f = 0$,

$$(q r \alpha) = \sqrt{6}\Delta^4, \qquad -(r \alpha p) = 4\sqrt{6}\psi\Delta^2,$$
$$(\alpha p q) = 16\sqrt{6}\psi^2, \quad -(p q r) = -24\Omega\Delta.$$

Si donc on pose

$$(66) \qquad x_0 = \frac{4\psi}{\Delta^2},$$

on en déduit, eu égard à l'identité qui existe pour Ω (p. 406), *les formules suivantes, qui seront la base de nos explications ulté-*

rieures :

$$\frac{-(r\alpha p)}{(qr\alpha)} = x_0, \quad \frac{(\alpha pq)}{(qr\alpha)} = x_0^2, \quad \frac{(pqr)}{(qr\alpha)} = \pm\sqrt{x_0^3 - \frac{1}{2}Sx_0 + \frac{1}{3}T}.$$

L'équation (65) se transforme donc en (¹)

$$(67) \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \sqrt{\varphi(x_1)} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \sqrt{\varphi(x_2)} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \sqrt{\varphi(x_3)} \\ 1 & x_0 & x_0^2 & \sqrt{\varphi(x_0)} \end{vmatrix}$$

On transforme enfin aisément, au moyen de la substitution (61), le déterminant qui figure dans le second membre de telle sorte que *la condition pour que les points* x_1, x_2, x_3 *soient en ligne droite apparaisse sous la forme*

$$(68) \qquad \begin{vmatrix} 1 & s_1^2 & s_1^4 & s_1 c_1 \Delta_1 \\ 1 & s_2^2 & s_2^4 & s_2 c_2 \Delta_2 \\ 1 & s_3^2 & s_3^4 & s_3 c_3 \Delta_3 \\ 1 & s_0^2 & s_0^4 & s_0 c_0 \Delta_0 \end{vmatrix} = 0$$

(s_i, c_i, Δ_i étant écrits à la place de $\sin\operatorname{am} u_i$, ...), où, d'après le théorème d'addition des fonctions elliptiques (p. 362),

$$(69) \qquad u_1 + u_2 + u_3 + u_0 \equiv 0 \pmod{\omega, \omega'}.$$

Nous obtiendrions encore ainsi pour les points d'intersection de la courbe primitive avec une droite l'équation (36) (p. 405); mais il résulte en même temps de là que les quantités u_0 sont identiques avec les grandeurs désignées alors par ϑ. *Les arguments des neuf points d'inflexion sont donc donnés par les valeurs*

$$(70) \qquad -\frac{1}{3}u_0 + \frac{1}{3}(p\omega + q\omega'),$$

(¹) Le signe de $\varphi(x_0)$, dans les termes de la dernière ligne horizontale, peut être choisi arbitrairement; mais on doit prendre un signe déterminé lorsqu'on introduit les fonctions elliptiques, et ce signe est alors complétement donné par les équations (60) et (62).

u_0 étant déterminé par les équations (1)

$$(71)\quad \begin{cases} \varkappa'' \sin^2 \operatorname{am} u_0 + \varkappa''' \cos^2 \operatorname{am} u_0 = \dfrac{4\psi}{\Delta^2}, \\ \sin \operatorname{am} u_0 \cos \operatorname{am} u_0 \Delta \operatorname{am} u_0 = \dfrac{4\sqrt{6}}{(\varkappa''' - \varkappa'')\sqrt{\varkappa' - \varkappa'''}} \dfrac{\Omega}{\Delta^3}. \end{cases}$$

Ici $\varkappa'$, $\varkappa''$, $\varkappa'''$ sont les racines de l'équation (59); *Δ, ψ, Ω désignent les covariants connus de la courbe primitive, écrits en coordonnées du point x, dont le point tangentiel a été choisi pour sommet du faisceau dans la représentation paramétrique* (57).

Pour effectuer la détermination des points d'inflexion, il ne reste donc plus qu'à résoudre l'équation de trisection qui détermine $\sin \operatorname{am} \frac{1}{3} u_0$ par $\sin \operatorname{am} u_0$; autrement dit, *les valeurs que prend la fonction* $\sin \operatorname{am} u$ *pour les arguments* (70) *des neuf points d'inflexion sont les racines de l'équation du neuvième degré en s*

$$(72)\quad \frac{1}{\Delta}\sqrt{\frac{4\psi - \varkappa'''\Delta^2}{\varkappa'' - \varkappa'''}} = s\,\frac{3 - 4(1+k^2)s^2 + 6k^2 s^4 - k^4 s^8}{1 - 6k^2 s^4 + 4k^2(1+k^2)s^6 - 3k^4 s^8},$$

dans laquelle k^2 se détermine de la manière connue au moyen de $\varkappa'$, $\varkappa''$, $\varkappa'''$. La résolution de cette équation peut se ramener à la résolution de l'équation $G(\varkappa, \lambda) = 0$, à l'aide de laquelle nous avons déjà déterminé les points d'inflexion.

Ainsi que nous l'avons déjà fait observer, toutes ces recherches sur l'introduction des fonctions elliptiques dans la théorie des courbes du troisième ordre ont une marche notablement plus claire si, au lieu des fonctions s, c, Δ, on introduit une autre fonction doublement périodique de u habituellement désignée par $p(u)$ ainsi que ses dérivées par rapport à u (2). C'est la fonc-

---

(1) *Voir* aussi, pour ces transformations, le Mémoire plusieurs fois cité de Clebsch, *Sur les polygones de Steiner* (*Journal de Crelle*, t. 63).

(2) C'est la fonction dont Weierstrass fait usage dans ses leçons sur la théorie des fonctions elliptiques, et qui présente d'assez nombreux avantages sur les fonctions s, c, Δ de Jacobi. Sur les formules fondamentales qui ont lieu à l'égard de cette fonction, *voir* Kiepert, *Journal de Crelle*, t. 76, p. 21.

tion de laquelle procède directement l'inversion de l'intégrale suivante :

$$(73)\qquad u = \int_{\infty}^{x} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - 2Sx + \frac{4}{3}T}} \quad \text{pour} \quad x = p(u).$$

Les dérivées de $p(u)$, par rapport à u, seront toujours dans la suite désignées par $p'(u)$, $p''(u)$, ... ; relativement à ces dernières, on a, en omettant, pour abréger, l'argument u,

$$(74)\quad \begin{cases} p'^2 = 4p^3 - 2Sp + \frac{4}{3}T, \\ p'' = 6p^2 - S, \\ p''' = 6(pp' + p'p) = 12pp', \\ p^{(4)} = 6(pp'' + 2p'^2 + p''p) = 120p^3 - 36Sp + 16T, \\ p^{(5)} = 6(pp''' + 3p'p'' + 3p''p' + p'''p) = 36p'(10p^2 - S), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ p^{n+2} = 6\left(pp^{(n)} + \frac{n}{1}p'p^{(n-1)} + \frac{n.n-1}{1.2}p''p^{(n-2)} + \dots + p^{(n)}p\right). \end{cases}$$

En posant donc actuellement dans (57) $x = p(u) = p$, $\lambda = 1$, nous obtenons la représentation paramétrique de la courbe primitive sous la forme suivante :

$$(75)\qquad \rho y_i = -4m_i + 4l_i p + \sqrt{\frac{3}{2}}\, n_i p' + \frac{1}{6}\Delta x_i p''.$$

On peut aisément établir la connexion de la fonction p avec $\sin\operatorname{am} u$. On a en effet, d'après (61) et (63),

$$x = (x'' - x''')\sin\operatorname{am} v + x''',$$

si

$$v = \frac{\sqrt{x' - x'''}}{2}\int_{x'''}^{x} \frac{dx}{\sqrt{x^3 - \frac{1}{2}Sx + \frac{1}{3}T}}$$
$$= \sqrt{x' - x'''}\left(u + \int_{x'''}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - 2Sx + \frac{4}{3}T}}\right),$$

u désignant encore l'intégrale (73). Si ω et ω' ont la même signifi-

cation que plus haut (cf. p. 359), on a, par un choix convenable du contour d'intégration ([1]),

$$\omega + \frac{\omega'}{2} = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{d\mu}{\sqrt{\mu(1-\mu)(1-k^2\mu)}}$$
$$= -\sqrt{x'-x'''}\int_{x'''}^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x^3-2Sx+\frac{4}{3}T}}.$$

Il vient par suite

$$v = \sqrt{x'-x'''}\,u - \omega - \frac{\omega'}{2},$$

et comme, d'après la définition $x = p(u)$, il en résulte

$$(76)\quad \begin{cases} p(u) = (x''-x''')\sin^2\operatorname{am}\left(u\sqrt{x'-x'''}-\omega-\dfrac{\omega'}{2}\right)+x''' \\ \quad = \dfrac{x'''-x''}{k^2\sin^2\operatorname{am}(u\sqrt{x'-x'''})}+x''' \quad ([2]), \end{cases}$$

on a par conséquent $p(0) = \infty$, comme cela doit être d'après (73). On reconnaît d'ailleurs que la fonction $p(u)$ admet pour périodes fondamentales

$$w = \frac{\omega}{\sqrt{x'-x'''}},\quad w' = \frac{\omega'}{\sqrt{x'-x'''}}.$$

Relativement à elles on déduit de (76) les relations simples

$$p\left(\frac{w}{2}\right) = x',\quad p\left(\frac{w'}{2}\right) = x''',\quad p\left(\frac{w+w'}{2}\right) = x''.$$

La théorie de la fonction $p(u)$ étant supposée connue, l'établissement de l'équation des points d'inflexion s'effectue d'une manière extrêmement simple. Au moyen d'un procédé analogue à celui qui a servi pour établir les équations (65) et (67), on obtient d'abord, en partant des équations (75), *la condition pour que trois points* x_1,

---

([1]) *Voir* Königsberger, *loc. cit.*, Ire Partie, p. 312.

([2]) On a en effet

$$\sin\operatorname{am}(u\pm\omega) = -\sin\operatorname{am}u,$$
$$\sin\operatorname{am}\left(u\pm\frac{\omega'}{2}\right) = \frac{1}{k\sin\operatorname{am}u}.$$

x_2, x_3 *soient en ligne droite* [p_i *étant égal à* $p(u_i)$] *sous la forme*

$$(77)\qquad \begin{vmatrix} 1 & p_1 & p'_1 & p''_1 \\ 1 & p_2 & p'_2 & p''_2 \\ 1 & p_3 & p'_3 & p''_3 \\ 1 & p_0 & p'_0 & p''_0 \end{vmatrix} = 0,$$

relation où, par analogie avec (66) et (67),

$$p_0 = x_0 = \frac{4\psi}{\Delta^2}, \quad p'_0 = -16\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\Omega}{\Delta^3}, \quad p''_0 = \frac{96\psi^2}{\Delta^4} - S,$$

de telle sorte que les relations (74) entre p_0, p'_0, p''_0 sont satisfaites en vertu de l'identité qui a lieu entre Ω, f, Δ, ψ. La valeur de $p_0 = p(3u)$, u étant l'argument d'un point d'inflexion, nous est par là donnée rationnellement; pour déterminer les points d'inflexion eux-mêmes, nous n'avons donc plus qu'à exprimer $p(3u)$ en $p(u)$, c'est-à-dire $p(u_0)$ en $p\left(\frac{1}{3}u_0\right)$. Or on a, d'une manière générale,

$$(78)\qquad p(nu) = p(u) - \frac{\psi_{n-1}(u)\psi_{n+1}(u)}{\psi_n(u)\psi_n(u)},$$

la fonction $\psi_\rho(u)$ étant définie par le déterminant suivant (¹) :

$$\psi_\rho(u) = \frac{(-1)^{\rho-1}}{[2!3!\ldots(\rho-1)!]^2}\begin{vmatrix} p' & p'' & \ldots & p^{(\rho-1)} \\ p'' & p''' & \ldots & p^{(\rho)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p^{(\rho-1)} & p^{(\rho)} & \ldots & p^{(2\rho-3)} \end{vmatrix}.$$

On en tire pour $n = 3$, sous le bénéfice de (74),

$$(79)\qquad p(3u) = p - 4p'^2\frac{12pp'^2p'' - 4p'^4 - p''^3}{(12pp'^2 - p''^2)^2},$$

ou, après une transformation simple pour $p(3u) = p_0 = \frac{4\psi}{\Delta^2}$ (²),

$$(80)\qquad \left[\left(\frac{4\psi}{\Delta^2} - p\right)(12pp'^2 - p''^2) + 4p'^2p''\right](12pp'^2 - p''^2) - 16p'^6 = 0.$$

(¹) C'est sous cette forme que les équations de division ont été établies par Kiepert (*Journal de Crelle*, t. 76, p. 21).

(²) On pourrait aussi déduire cette équation de (77) par passage à la limite; toute-

C'est là, si l'on remplace p'^2, p'', d'après (74), par leurs expressions rationnelles en p, l'équation du neuvième degré en p $\left[\text{ou en } \frac{\varkappa}{\lambda}, \text{ équations (57)}\right]$ qui détermine les neuf rayons du faisceau $pa_x^2 a_y - \alpha_x^2 \alpha_y = 0$ qui vont du point $N = 0$ aux neuf points d'inflexion, x étant un point quelconque de la courbe. Les coefficients de cette équation dépendent uniquement des invariants S, T et des covariants ψ, Δ^2. *L'équation (79) peut donc être considérée comme le résultat de l'élimination des y_i entre les trois équations*

$$f(y) \equiv a_y^3 = 0, \quad \Delta(y) \equiv \alpha_y^3 = 0, \quad pa_x^2 a_y - \alpha_x^2 \alpha_y = 0.$$

Observons encore ici que *la valeur paramétrique $p = p_0$ appartient elle-même au sommet $N = 0$ de notre faisceau de rayons.* Si l'on pose en effet dans (57) $\varkappa = 4\psi$, $\lambda = \Delta^2$, il vient

$$py_i = \Delta\left[\left(16\psi^2 - \frac{1}{6}S\Delta^4\right)x_i - 4\Delta^3 m_i + 16\psi\Delta l_i + 24 n_i \Omega\right];$$

mais, d'après l'équation (37), on a pour $f = 0$

$$24\Omega n_i = \left(16\psi^2 - \frac{1}{6}S\Delta^4\right)x_i - 4\Delta^3 m_i + 16\psi\Delta l_i,$$

de sorte que les y_i deviennent en fait proportionnels aux n_i. Cela résulte encore, au surplus, du théorème d'addition. Comme, en effet, au point x appartient l'argument zéro ($p = \infty$), on a, v étant l'argument de $N = 0$, pour les points de rencontre de la tangente de x avec $f = 0$,

$$0 + 0 + v + u_0 \equiv 0,$$

d'où

$$v \equiv -u_0 \quad \text{et} \quad p(v) = p(-u_0) = p(u_0).$$

La résolution de l'équation (80) ou (79) dépend, comme on sait, de la résolution de l'équation spéciale de trisection tirée de (79)

---

fois on obtiendrait ainsi d'abord une équation du douzième degré en p, de laquelle il faudrait encore séparer un facteur cubique. L'introduction des fonctions elliptiques a précisément pour effet de rendre superflus les calculs directs de cette espèce et les éliminations; l'emploi de la fonction $p(u)$ présente un avantage tout particulier, à cause de sa connexion avec la quantité irrationnelle qui figure dans (57).

pour $u_0 = 0$, ou, ce qui revient au même, $p_0 = \infty$, c'est-à-dire de l'équation

(81) $$12pp'^2 - p''^2 = 0,$$

ou, en vertu de (74), de l'équation

(81)* $$p^4 - Sp^2 + \frac{4}{3}Tp - \frac{1}{12}S^2 = 0.$$

Or *il suffit de poser dans cette dernière* $p = -\frac{\varkappa}{\lambda}$ *pour obtenir de nouveau l'équation* $G(\varkappa, \lambda) = 0$ *qui nous a servi précédemment à la détermination des points d'inflexion* (p. 308 et suiv.). Les quatre racines p_1, p_2, p_3, p_4 de cette équation nous donnent les valeurs

$$p_1 = p\left(\frac{\omega}{3}\right),\quad p_2 = p\left(\frac{\omega'}{3}\right),\quad p_3 = p\left(\frac{\omega + \omega'}{3}\right),\quad p_4 = p\left(\frac{\omega + 2\omega'}{3}\right).$$

Pour $p = \infty$ ou $u_0 = 0$ il vient $\Delta = 0$, c'est-à-dire que les points x et N sont situés en un point d'inflexion, et alors l'équation (81) donne quatre des huit autres points d'inflexion, parmi lesquels il ne doit pas s'en trouver deux en ligne droite avec le premier. On apprend, dans la théorie des fonctions elliptiques, à former d'une manière effective les racines de l'équation (80) à l'aide des grandeurs p_1, p_2, p_3, p_4, et nous ne nous en occuperons pas davantage ici ([1]).

On ramène facilement aussi d'une autre manière la résolution de l'équation (80) à l'équation $G(\varkappa, \lambda) = 0$, ce qui permet de donner réellement les racines de (80) d'une manière accessible aux développements géométriques. Si l'on pose en effet dans (80) $p = \frac{\alpha_x^2 \alpha_y}{a_x^2 a_y}$, cette équation représente pour les y_i variables une

([1]) Sur la résolution des équations de division pour $p(u)$, *voir* KIEPERT, *Journal de Crelle*, t. 76, p. 34 et suiv.; sur les problèmes correspondants traités par Abel pour $\sin \operatorname{am} u$, *voir*, par exemple, KÖNIGSBERGER, Ouvrage cité, IIe Partie, p. 210. L'équation de la trisection est aussi un cas particulier des équations du neuvième degré traitées par Hesse (*Journal de Crelle*, t. 34). Si l'on effectue les opérations nécessaires à la résolution de ces dernières suivant la représentation géométrique d'une courbe C_3, on reconnaît également que l'équation du quatrième degré à établir est ici donnée par $G(\varkappa, \lambda) = 0$. Sur ces équations de Hesse, *voir* aussi CLEBSCH, *Binäre Formen*, p. 234 et suiv.

courbe du neuvième ordre qui se décompose en neuf lignes, savoir les droites joignant N = o aux neuf points d'inflexion. Or trois quelconques de ces droites joignant N = o à trois points d'inflexion en ligne droite coupent encore f en trois autres points, et il est immédiatement visible que ces derniers points sont situés sur une conique qui a avec la courbe primitive au point N un contact du second ordre. Corrélativement aux quatre triangles inflexionnels, qui sont représentés, d'après ce qui a été dit plus haut, par

$$p_1 f - \Delta = 0, \quad p_2 f - \Delta = 0, \quad p_3 f - \Delta = 0, \quad p_4 f - \Delta = 0,$$

il existe aussi quatre systèmes ($\Phi_i = 0$) de trois coniques de telle nature que chacun de ces systèmes, en y adjoignant le triangle inflexionnel correspondant, passe par tous les points de rencontre de la courbe citée du neuvième ordre avec $f = 0$. Le premier membre de l'équation (80) peut donc, à l'aide de $f(y) = 0$, être décomposé de quatre manières différentes en deux facteurs

$$(p_i f - \Delta)\Phi_i,$$

ce qui répond aux quatre racines de l'équation spéciale de division (81). *Cette dernière donne donc encore de nouveau la détermination des triangles inflexionnels.* Actuellement, pour trouver les racines de (80), il faut résoudre deux de ces triangles en facteurs linéaires, ce qui se fait d'après les indications de la page 350. Nous déterminerons donc les points d'intersection d'une droite quelconque, que nous pouvons supposer être la tangente de x, avec les côtés d'un triangle $p_i f(y) - \Delta(y) = 0$; autrement dit, nous poserons dans cette dernière équation $y = \Delta x + \rho n$ et nous formerons l'équation cubique en ρ qui prend ainsi naissance, et qui, eu égard aux relations (p. 398 et suiv.)

$$f = 0, \quad a_x^2 a_n = 0, \quad \alpha_x^2 \alpha_n = 0, \quad a_x a_n^2 = -\frac{1}{6}\Delta^3, \quad \alpha_x \alpha_n^2 = -\frac{2}{3}\Delta\psi, \quad \alpha_n^3 = 0,$$

prend la forme suivante :

$$\rho^3 \alpha_n^3 - \rho^2 \Delta^2\left(2\psi - \frac{1}{2}\Delta^2 p_i\right) + \Delta^4 = 0. \tag{82}$$

Nous avons encore à y calculer le terme α_n^3. Or, de l'équation

$$a_x a_n^2 = -\frac{1}{6}\Gamma_1 - \frac{2}{3} f\psi,$$

il résulte par formation polaire, pour $u_n = N_x'^3 u_{n'}$,

$$a_y a_n^2 + 8 a_x a_n a_{n'} N_x'^3 N_y' = -\frac{1}{6}\sum \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x_i} y_i - 4 f \psi_x^5 \psi_y - 2\psi a_x^2 a_y.$$

Pour $y_i = n_i$ les termes du second membre provenant de Γ_1 s'évanouissent, à cause de $a_x^2 a_n = 0$, $\alpha_x^2 \alpha_n = 0$ et il vient, d'après l'équation (28) (p. 316),

$$a_n^3 = -4 f \Omega - 8 a_x a_n a_{n'} N_x'^3 N_n'.$$

Ici l'on a

(83) $$2 a_x a_n a_{n'} N_x'^3 N_n' = a_x a_n (ab\alpha)(\alpha_x b_n + \alpha_n b_x) b_x \alpha_x.$$

Le premier terme de l'expression qui figure dans le second membre change de signe si l'on permute a et b; il s'évanouit donc identiquement; le second terme est également nul, car on a

$$\begin{aligned}(ab\alpha) a_x b_x^2 \alpha_x a_n \alpha_n &= \frac{1}{2}(ab\alpha)(b_x a_n - a_x b_n) a_x b_x \alpha_x \alpha_n \\ &= \frac{1}{2}(ab\alpha)[(ac\beta) b_x - (bc\beta) a_x] a_x b_x \alpha_x \alpha_n c_x^2 \beta_x^2, \\ &= \frac{1}{2}(ab\alpha)[(ab\beta) c_x - (abc)\beta_x] a_x b_x \alpha_x \alpha_n c_x^2 \beta_x^2, \\ &= \frac{1}{2}(Pf - Q\Delta).\end{aligned}$$

Or on a, en vertu de la permutabilité de a, b, c,

$$\begin{aligned}Q &= \frac{1}{3}(abc)[(ab\alpha)c_x - (ac\alpha)b_x - (cb\alpha)a_x] a_x b_x c_x \alpha_x \alpha_n \\ &= \frac{1}{3}\Delta \alpha_x^2 \alpha_n = 0.\end{aligned}$$

L'expression

$$\begin{aligned}\delta Q &= [(ab\alpha)(ab\beta)\beta_x b_x + 2(a\beta\alpha)(a\beta c)c_x^2] a_x \beta_x \alpha_x \alpha_n \\ &\quad + \frac{1}{2} S (abd)(abc) a_x b_x c_x^2 d_x d_n\end{aligned}$$

est donc également nulle. Dans le second membre le dernier terme a la valeur $\frac{1}{6} S \Delta d_x^2 d_n$ et conséquemment s'évanouit; le second terme se forme, au facteur près -2, du terme désigné (p. 403) par B',

si l'on pose $y_i = n_i$, et a par conséquent la valeur [comparez équation (34), p. 404]

$$-\frac{4}{3}\alpha_i\alpha_x\alpha_{.i} + \frac{2}{3}\Delta_1\alpha_x^2\alpha_{.i} = \frac{4}{3}\Omega.$$

Mais le premier terme de δQ est P et nous avons par suite $\delta Q = P + \frac{4}{3}\Omega = 0$, c'est-à-dire que le second membre de (83) est égal à $-\frac{2}{3}\Omega f$, et nous avons

(84) $$a_{.i}^3 = -\frac{4}{3}f\Omega,$$

d'où, à cause de $\delta N = \delta\Omega = 0$,

(85) $$\alpha_{.i}^3 = -\frac{4}{3}\Delta\Omega.$$

Notre équation cubique (82) se transforme donc en

(86) $$8\Omega\rho^3 + 3\Delta(4\psi - \Delta^2 p_i)\rho^2 - 6\Delta^3 = 0,$$

équation dont les coefficients ne dépendent plus que des grandeurs $p_0 = \frac{4\psi}{\Delta^2}$ et $p'_0 = -16\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\Omega}{\Delta^3}$. Si donc nous désignons, par analogie avec les racines p_i de (81), les racines de cette équation par ρ'_i, ρ''_i, ρ'''_i, on obtient les équations du triangle qui correspond à p_i, si dans l'équation $p_i a_z^2 a_y - \alpha_z^2\alpha_y = 0$ on remplace z_k par les valeurs $\Delta x_k + \rho_i^{(h)} n_k$. Les équations de ces trois côtés sont donc données par

(87) $$\left\{\begin{array}{l} p_i(\Delta^2 a_x^2 + 2\rho_i^{(h)}\Delta a_x a_n + \rho_i^{(h)2} a_n^2)a_y \\ -(\Delta^2\alpha_x^2 + 2\rho_i^{(h)}\Delta\alpha_x\alpha_n + \rho_i^{(h)2}\alpha_n^2)\alpha_y = 0, \end{array}\right.$$

si l'on fait $\rho_i^{(h)}$ respectivement égal à ρ'_i, ρ''_i, ρ'''_i. Les côtés du triangle qui répond à la racine p_k seront précisément représentés par des équations semblables, dans lesquelles seulement p_i, $\rho_i^{(h)}$ ont été remplacés par p_k, $\rho_k^{(h)}$ respectivement, $\rho_k^{(h)}$ désignant les racines de l'équation dérivée de (86) par permutation de p_i avec p_k. Le point de rencontre d'un côté quelconque de l'un des triangles avec un côté de l'autre triangle est alors toujours un point d'inflexion dont on peut calculer les coordonnées t_i en fonction de p_i, p_k, $\rho_i^{(h)}$, $\rho_k^{(l)}$; *de ces coordonnées on déduit une racine de l'équation du*

neuvième degré au moyen de la substitution

$$p = \frac{\alpha_y^2 \alpha_t}{a_x^2 a_t}.$$

Le numérateur et le dénominateur de l'expression qui figure dans le second membre deviennent alors des fonctions rationnelles entières de deux racines de (81) *et de deux racines des équations correspondantes* (86) ; *les coefficients de ces racines apparaissent, d'après* (87), *comme des covariants du dix-huitième ordre de f, écrits en coordonnées du point fixe x, et peuvent en conséquence s'exprimer tous par* Δ, ψ *et* Ω. Le calcul effectif de ces coefficients peut s'effectuer à l'aide de quelques opérations symboliques.

Après ces explications détaillées sur l'équation de la trisection, il est à peine nécessaire d'observer que, d'une manière générale, les équations de la division des fonctions elliptiques peuvent être appliquées à la résolution effective des problèmes algébriques d'élimination, car ils donnent immédiatement le résultat de l'élimination sous forme toute préparée, à la seule condition que la fonction relative à l'argument multiple, c'est-à-dire à $p(nu)$, soit représentée dans sa dépendance du point x et des autres points arbitraires qui peuvent se présenter. C'est ce qu'on peut toujours réaliser en se servant du théorème d'addition pour $p(u)$, c'est-à-dire à l'aide de la formule

$$(88)\quad p(u+v) = \frac{[p(u)+p(v)][2p(u)p(v)-S]+\frac{4}{3}T-p'(u)p'(v)}{2[p(u)-p(v)]^2}.$$

Nous éclaircirons ce point par l'exemple de la division en cinq parties. Nous nous proposerons d'abord le problème qui consiste à déterminer les coniques passant par un point fixe v et ayant en un autre point u un contact du quatrième ordre avec $f=0$, de sorte que u soit déterminé (p. 391) par

$$5u + v + 2u_0 \equiv 0.$$

Il vient pour $p(v) = q$, puisque p est une fonction paire,

$$p(5u) = p(2u_0+v) = \frac{[p(2u_0)+q][2p(2u_0)q-S]+\frac{4}{3}T-p'(2u_0)q'}{2[p(2u_0)-q]^2},$$

relation où, d'après (78),

$$p(2u_0) = p_0 - \frac{1}{4}\,\frac{12p_0 p_0'^2 - p_0''^2}{p_0'^2} = -\frac{8\psi}{\Delta^2} + \frac{(96\psi^2 - S\Delta^4)^2}{1536\Omega^2\Delta^2}$$

On peut encore poser, dans le second membre,

$$q = \frac{\alpha_r^2 \alpha_z}{a_x^2 a_z}, \quad q' = \sqrt{4q^3 - 2Sq + \frac{4}{3}T},$$

en admettant que les quantités z_i soient les coordonnées ternaires du point q et qu'à ce dernier corresponde le signe positif du radical. On peut, en particulier, faire coïncider avec x le point complétement arbitraire z; il vient alors $q = \infty$, d'où $v = 0$, et nous obtenons

$$p(5u) = p(2u_0) = -\frac{8\psi}{\Delta^2} + \frac{(96\psi^2 - S\Delta^4)^2}{1536\Omega^2\Delta^2}.$$

Si l'on porte cette valeur dans l'équation de division (78) pour $n = 5$, il en résulte une équation du degré 25 en p. *Cette dernière est le résultat de l'élimination des y_i, dy_i, d^2y_i, d^3y_i, d^4y_i entre les équations*

$$pa_x^2 a_y - \alpha_x^2 \alpha_y = 0, \quad a_y^3 = 0, \quad a_y^2 a_{dy} = 0,$$
$$a_y^2 a_{d^2y} + 2a_y a_{dy}^2 = 0,$$
$$a_y^2 a_{d^3y} + 6a_y a_{dy} a_{d^2y} + 2a_{dy}^3 = 0,$$
$$a_y^2 a_{d^4y} + 8a_y a_{dy} a_{d^3y} + 12a_{dy}^2 a_{d^2y} + 6a_y a_{d^2y}^2 = 0$$

et entre l'équation exprimant que le point x est situé sur une même conique que y et les quatre points voisins de y (cette équation pouvant être écrite de la manière connue sous la forme d'un déterminant à termes de six facteurs. Pour $p = \frac{\alpha_x^2 \alpha_y}{a_x^2 a_y}$ on obtient ainsi une courbe du vingt-cinquième ordre qui se décompose en vingt-cinq droites, savoir les vingt-cinq lignes qui joignent $N = 0$ aux points de contact des coniques passant par x.

C'est ainsi que l'on peut établir d'une manière complète, à l'aide de la théorie des fonctions elliptiques, les équations algébriques auxquelles conduisent les problèmes de contact dont nous nous sommes occupé plus haut. Mais on peut traiter de la même manière les éliminations qui conduisent à la détermination des cou-

ples de points de Steiner, car elles mènent aussi à la division des fonctions elliptiques ; tous les points u qui forment avec v un couple répondant au nombre n ont été déterminés (p. 373) par

$$u \equiv v + \frac{1}{n}(p\varpi + q\varpi').$$

Il est seulement à remarquer ici que cette condition est indépendante de l'argument u_0 ; mais on peut toujours, pour plus de simplicité, faire coïncider le point v avec le point complétement arbitraire $N = 0$, c'est-à-dire prendre $v = u_0$ (p. 426). Si nous désignons maintenant par y_i les coordonnées de v, par z_i celles de u, il est immédiatement visible que la division en n parties de la fonction $p(u)$ représente le résultat de l'élimination des grandeurs $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots, x_i^{(2n)}$, z_i entre les équations suivantes :

$$\begin{gathered}
(x^{(1)}x^{(2)}y) = 0, \quad (x^{(3)}x^{(4)}y) = 0, \quad \ldots, \quad (x^{(2n-1)}x^{(2n)}y) = 0, \\
(x^{(2)}x^{(3)}z) = 0, \quad (x^{(4)}x^{(5)}z) = 0, \quad \ldots, \quad (x^{(2n)}x^{(1)}z) = 0, \\
a_{x^{(1)}}^3 = 0, \quad a_{x^{(2)}}^3 = 0, \quad \ldots, \quad a_{x^{(2n)}}^3 = 0, \\
a_z^3 = 0, \quad p a_x^2 a_z - \alpha_x^2 \alpha_z = 0.
\end{gathered}$$

L'équation finale relative à ce problème se distingue donc de l'équation correspondante relative aux problèmes de contact par cette circonstance que la fonction $p(nu)$ ne dépend pas des fonctions $p(mu_0)$, mais uniquement (pour $v = u_0$) de la quantité $p(u_0)$.

FIN DU TOME DEUXIÈME.

TABLE ALPHABÉTIQUE.

FIN DE LA TABLE ALPHABÉTIQUE.

ERRATA.

Page 25, ligne 8 en remontant, ***au lieu de*** **ci-dessus,** ***lisez*** **ci-dessous.**

Page 91, ligne 13, ***au lieu de*** **sur les systèmes des courbes,** ***lisez*** **sur les systèmes de courbes.**

Page 104, ligne 12, ***au lieu de*** **$3(r-1)$,** ***lisez*** **$3r-1$.**

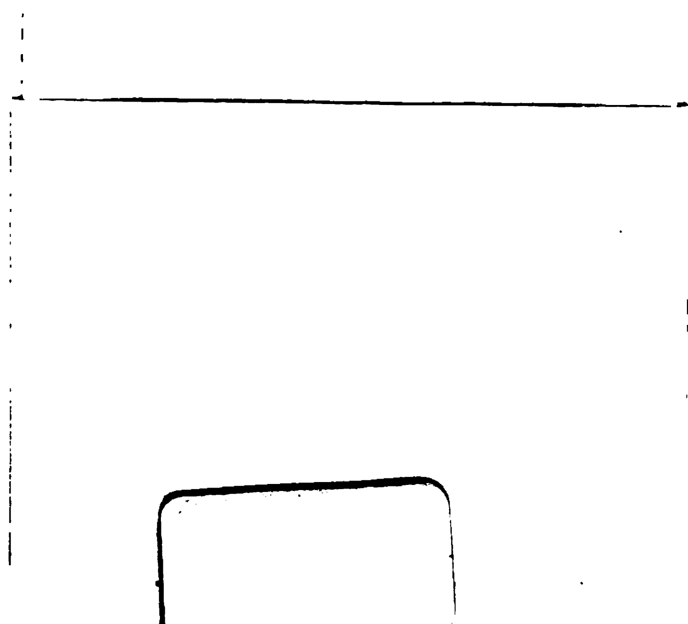
Page 135, note; page 148, note; page 163, note; page 194, lignes 6 et 27, ***au lieu de*** **univoques,** ***lisez*** **uni-déterminatives.**

Page 423, après la formule (73), ***ajoutez :*** **Elle est caractérisée par cette circonstance qu'elle dépend, sous une forme relativement rationnelle, des invariants S et T de la courbe, et que son introduction ne suppose pas la résolution de l'équation cubique $\varphi(x) = 0$.**

Tome I, page 368, lignes 28 et 29. Les mots ***inscrite*** **et** ***circonscrite*** **doivent être intervertis.**

Paris. — Imprimerie de Gauthier-Villars, quai des Augustins, 55.






3 2044 079 969 135